

Correction de l'interrogation 15

Ensembles et applications

1. (a) Énoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.

Solution. Soient E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. Alors,

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

- (b) Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse.

Solution. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que

$$f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{Id}_E.$$

De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

- (c) Énoncer le principe de superposition pour une équation différentielle d'ordre 1.

Solution. Soient I un intervalle, a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I , y_1 une solution de

$$(E_1) \quad \forall x \in I, \quad y'_1(x) + a(x)y_1(x) = b_1(x)$$

et y_2 une solution de

$$(E_2) \quad \forall x \in I, \quad y'_2(x) + a(x)y_2(x) = b_2(x).$$

Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de

$$(E) \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

2. Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^7 \end{matrix}$.

- (a) Montrer que $f(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$.

- (b) Montrer que $f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.

Solution.

- (a) Montrons que $f(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$. On procède par double inclusion. Montrons que $f(i\mathbb{R}) \subseteq i\mathbb{R}$. Soit $z \in f(i\mathbb{R})$. Par définition, il existe $\omega \in i\mathbb{R}$ tel que $z = f(\omega) = \omega^7$. Puisque $\omega \in i\mathbb{R}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = ib$. Donc

$$z = \omega^7 = (ib)^7 = i^7 b^7 = -ib^7 = i \underbrace{(-b^7)}_{\in \mathbb{R}}.$$

Donc $z \in i\mathbb{R}$ et ainsi $f(i\mathbb{R}) \subseteq i\mathbb{R}$.

Réciproquement, montrons que $i\mathbb{R} \subseteq f(i\mathbb{R})$. Soit $z \in i\mathbb{R}$. Alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $z = ib$. On rappelle que la fonction $x \mapsto x^7$ est bijective sur $\mathbb{R}$ de réciproque $x \mapsto \sqrt[7]{x}$. Posons $a = -\sqrt[7]{b}$ et $\omega = ia$. Alors, $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in i\mathbb{R}$ et

$$f(\omega) = (ia)^7 = i^7 a^7 = -i(-\sqrt[7]{b})^7 = -i(-b) = ib = z.$$

Donc $z = f(\omega)$ et $\omega \in i\mathbb{R}$. Donc $z \in f(i\mathbb{R})$. Ainsi, $i\mathbb{R} \subseteq f(i\mathbb{R})$.

Conclusion,

$$\boxed{f(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}}.$$

- (b) Montrons que $f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. On peut procéder par double inclusion. Procédons ici par équivalences. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{U}) &\Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{U} \\ &\Leftrightarrow z^7 \in \mathbb{U} \\ &\Leftrightarrow |z^7| = 1 \\ &\Leftrightarrow |z|^7 = 1 \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \quad \text{car } |z| \in \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{U}.$$

3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.

Solution. Soit $A \in \mathcal{P}(F)$. Montrons que $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$. Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\overline{A}) &\Leftrightarrow f(x) \in \overline{A} \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(A)}. \end{aligned}$$

Conclusion

$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}.$$

4. Soient E et F deux ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$. On suppose f injective. Montrer que $f(A) = f(B) \Rightarrow A = B$.

Solution. Supposons $f(A) = f(B)$. Montrons que $A = B$. Procédons par double inclusion. Montrons que $A \subseteq B$. Soit $x \in A$. Montrons que $x \in B$. Puisque $x \in A$, on a $f(x) \in f(A)$. Or $f(A) = f(B)$. Donc $f(x) \in f(B)$. Donc

$$\exists x' \in B, \quad f(x') = f(x).$$

Or f est injective. Donc $x' = x$. Donc $x = x' \in B$. Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, on en déduit que $A \subseteq B$.

Par symétrie des hypothèses sur A et B , on démontre de la même façon que $B \subseteq A$.

Donc $A = B$.

Conclusion,

$$f(A) = f(B) \Rightarrow A = B.$$

5. Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \text{ch}(\sin(x))$.

Solution. On a

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et

$$\text{ch}(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + o(u^3).$$

Posons $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Alors

- $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$.
- De plus

$$\begin{aligned} u^2(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^3) \\ &\quad + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{u^2(x)}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

- On a également $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $u^3(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$. Donc $o(u^3(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$.

Ainsi,

$$f(x) = \text{ch}(\sin(x)) = \text{ch}(u(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + o(x^3).$$

Conclusion,

$$f(x) = \text{ch}(\sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$