# Correction de l'interrogation 17
# Suites numériques

1. (a) Donner la définition de deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire ?

   *Solution.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si

   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   - $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Deux suites adjacentes convergent et vers la même limite.

   (b) Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit croissante et comment le démontre-t-on ?

   *Solution.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $f$ est croissante et que $u_1 \geqslant u_0$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On le démontre par récurrence bien sûr !

   (c) Enoncer la formule de Bernoulli et du binôme de Newton pour deux matrices.

   *Solution.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que $A$ et $B$ commutent i.e. $AB = BA$ alors,

   i. $(A+B)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$.

   ii. Si $m \neq 0$, $A^m - B^m = (A-B)\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{2n} < \frac{u_n^2}{3} + \frac{1}{2n}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelles sont les valeurs possibles de sa limite ? *Justifier votre réponse.*

   *Solution.* Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En tant que suite extraite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$. De plus par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{3} + \dfrac{1}{2n} = \dfrac{\ell^2}{3}$. Donc par passage à la limite dans l'inégalité,

$$0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\ell^2}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \ \text{ OU } \begin{cases} \ell \geqslant 0 \\ 0 \leqslant 1 \leqslant \frac{\ell}{3} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \ \text{ OU } \ \ell \geqslant 3.$$

   Conclusion, l'ensemble des valeurs possibles de $\ell$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\} \cup [3; +\infty[\,.}$$

3. Pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de $u_n$ en fonction de $n$.

   *Solution.* On reconnait une suite récurrente d'ordre 2. Soit $(E_c)$ : $r^2 - 2r + 2 = 0$ l'équation caractéristique associée. Son discriminant vaut $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$. Donc les racines de $(E_c)$ sont complexes conjuguées :

$$r = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

   Or

$$r = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{4}}.$$

   Par conséquent, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\lambda \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

En particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$,

$$\begin{cases} 3 = u_0 = \lambda \\ -1 = \sqrt{2}\left(\lambda \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -1 - \lambda = -4. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(3\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - 4\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).}$$

*Vérification :* $u_2 = 2u_1 - 2u_0 = -2 - 6 = -8$ *et pour* $n = 2$,

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \left(3\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - 4\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(-4) = -8 \text{ \textit{OK !}}$$

4. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}$.
*Solution.* Soit $f : x \mapsto -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$ et $f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par continuité de $f$ en 0, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n) < f(n+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n < u_{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

*Solution.* On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 + 1 \geqslant 1$ donc $\frac{1}{u_n^2+1} \leqslant 1$. Or par hypothèse, $u_n \geqslant 0$ donc $\frac{u_n}{u_n^2+1} \leqslant u_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or la suite est minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $\ell$ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 0$. Donc par passage à la limite, $\ell \geqslant 0$. Puis par continuité de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc en $\ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_n^2+1} = \dfrac{\ell}{\ell^2+1}$. Par passage à la limite dans $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1}$, on obtient alors,

$$\ell = \frac{\ell}{\ell^2+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \text{ OU } 1 = \frac{1}{\ell^2+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \text{ OU } \ell^2 + 1 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$