Correction de l'interrogation 19
Espaces vectoriels

1. (a) Définir la somme de deux espaces vectoriels.
   Solution. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors
   $$F+G=\{\,z\in E \mid \exists\,(x,y)\in F\times G,\ z=x+y\,\}.$$
   (b) Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
   Solution. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si (par définition)
   $$\forall z\in E,\ \exists!\,(x,y)\in F\times G,\quad z=x+y.$$
   si et seulement si (par caractérisation) :
   1. $F\cap G=\{0_E\}$.
   2. $F+G=E$.

   (c) Enoncer l'unicité du développement limité.
   Solution. Soient $n\in\mathbb{N}$, $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ tels que
   $$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o\left(x^n\right)\underset{x\to 0}{=}\sum_{k=0}^{n}b_kx^k+o\left(x^n\right).$$
   Alors, pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $a_k=b_k$.

2. Démontrer si $E=\left\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\;\middle|\;M\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=0_2\right\}$ est un espace vectoriel ou non.

   Solution. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $N=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. On a
   - $E\subseteq\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par définition.
   - Si $M=0_2$, alors $0_2N=0_2$. Donc $0_2\in E$.
   - Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(M_1,M_2)\in E^2$. Alors $M_1N=0_2$ et $M_2N=0_2$. Posons $M_3=\lambda M_1+\mu M_2$. Alors,
   $$\begin{aligned}M_3N=(\lambda M_1+\mu M_2)N=\lambda M_1N+\mu M_2N&=\lambda 0_2+\mu 0_2 \qquad \text{car } M_1\in E,\ M_2\in E\\&=0_2.\end{aligned}$$
   Donc $M_3\in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donc
   $$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$$

3. Soient $F=\{\,P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P''=0\,\}$ et $G=\{\,P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P(0)=0\,\}$. Déterminer $F+G$.
   Solution. Soit $P=a_0+a_1X+a_2X^2\in\mathbb{R}_2[X]$. D'une part, on a
   $$P\in F\quad\Leftrightarrow\quad 2a_2=0\quad\Leftrightarrow\quad a_2=0\quad\Leftrightarrow\quad P=a_0+a_1X.$$
   Ainsi, $F=\mathbb{R}_1[X]=\operatorname{Vect}(1,X)$. D'autre part,
   $$P\in G\quad\Leftrightarrow\quad a_0=0\quad\Leftrightarrow\quad P=a_1X+a_2X^2.$$
   Donc
   $$G=\left\{\,a_1X+a_2X^2\;\middle|\;(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\,\right\}=\operatorname{Vect}\left(X,X^2\right).$$
   Dès lors,
   $$\begin{aligned}F+G=\operatorname{Vect}(1,X)+\operatorname{Vect}\left(X,X^2\right)&=\operatorname{Vect}\left(1,X,X,X^2\right)\\&=\operatorname{Vect}\left(1,X,X^2\right)\qquad\text{car } C_2=C_3\\&=\mathbb{R}_2[X].\end{aligned}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{F+G=\mathbb{R}_2[X].}$$

4. Soient $F = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$ et $G = \text{Vect}(\text{ch})$. On admet que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

   Solution. Nous sommes en dimension infinie. Procédons donc par analyse-synthèse.

   Analyse Soit $f \in F + G$. Par définition, il existe $(g, h) \in F \times G$ tel que $f = g + h$.

   - Puisque $g \in F$, $g(0) = 0$ donc $f(0) = 0 + h(0) = h(0)$.
   - De plus, $h \in G = \text{Vect}(\text{ch})$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $h = \lambda\,\text{ch}$.

   D'où $f(0) = h(0) = \lambda\,\text{ch}(0) = \lambda$. Donc λ est fixé de façon unique à f fixé. Par suite, $g = f - \lambda\,\text{ch} = f - f(0)\,\text{ch}$. Dès lors g est aussi fixé de façon unique à f fixé. D'où l'unicité de la décomposition. Donc $F \oplus G$ i.e. F et G sont en sommes directe.

   Synthèse. Soit $f \in E$. Posons $g = f - f(0)\,\text{ch}$ et $h = f(0)\,\text{ch}$. Montrons les points suivants :

   (i) $g \in F$,

   (ii) $h \in G$,

   (iii) $f = g + h$

   Pour (i), puisque $f \in E$ et $\text{ch} \in E$, par combinaison linéaire, $g \in E$. De plus, $g(0) = f(0) - f(0)\,\text{ch}(0) = 0$. Donc $g \in F$.

   Pour (ii), on a directement $h = \underbrace{f(0)}_{\in\mathbb{R}}\,\text{ch} \in \text{Vect}(\text{ch})$. Donc $h \in G$.

   Enfin, pour (iii), on a $g + h = f - f(0)\,\text{ch} + f(0)\,\text{ch} = f$.

   Par ces trois points, on en déduit que $f = g + h \in F + G$. Ceci étant vrai pour $f \in E$ quelconque, on a $E \subseteq F + G$. Or F et G sont des sous-espaces vectoriels de E donc $F + G \subseteq E$. Ainsi, $F + G = E$.

   Par cette analyse/synthèse, on en déduit que $F \oplus G = E$ i.e.

   $$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

   NB : on pouvait démontrer la somme directe par l'intersection. Soit $f \in F \cap G$. Alors, $f \in G = \text{Vect}(\text{ch})$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\,\text{ch}$. De plus $f \in F$ donc $0 = f(0) = \lambda\,\text{ch}(0) = \lambda$. Donc $f = 0 \times \text{ch} = 0_E$. Ceci étant vrai pour $f \in F \cap G$ quelconque, on a $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. Or F et G sont des sous-espaces vectoriels donc $\{0_E\} \subseteq F \cap G$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$ et F et G sont en somme directe.

5. Déterminer la multiplicité de 3 pour le polynôme $P = X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 6X - 9$.

   Solution. On a

   $$P(3) = 3^4 - 6 \times 27 + 8 \times 9 + 6 \times 3 - 9 = 9\,(9 - 18 + 8 + 2 - 1) = 9\,(19 - 19) = 0.$$

   Donc 3 est une racine de multiplicité au moins 1. De plus, $P' = 4X^3 - 18X^2 + 16X + 6$ et donc

   $$P'(3) = 4 \times 27 - 18 \times 9 + 16 \times 3 + 6 = 6\,(18 - 27 + 8 + 1) = 6\,(27 - 27) = 0.$$

   Donc 3 est une racine de multiplicité au moins 2. Poursuivons, $P'' = 12X^2 - 36X + 16$ et donc

   $$P''(3) = 12 \times 9 - 36 \times 3 + 16 = 4\,(27 - 27 + 4) = 16 \neq 0.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{3 \text{ est une racine double de } P.}$$