Correction de l'interrogation 01
Logique et raisonnement

1. Compléter le plus précisément possible avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   1.1 $\boxed{(\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v) \;\Leftarrow\; (u \geqslant v \geqslant 0)}$. En effet, si $u \geqslant v$, alors par croissance de la fonction exponentielle, on a $\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v$. D'où l'implication réciproque. L'implication directe est fausse à cause de la condition de positivité : si $u = -1$ et $v = -2$, on a bien $\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v$ et $u \geqslant v$ mais $v \geqslant 0$ est fausse. Donc pour $(u,v) = (-1,-2)$, on a $(\mathrm{e}^u \geqslant \mathrm{e}^v) \;\text{ ET }\; (v < 0)$ ce qui démontre que l'implication est fausse en général.

   1.2 $\boxed{\left(\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}\right) \;\times\; (a \leqslant b)}$. En effet, pour $a = 1$ et $b = -1$ par exemple, on a $\frac{1}{a} = \frac{1}{1} = 1 \geqslant \frac{1}{-1} = -1 = \frac{1}{b}$ et pourtant $a = 1 > -1 = b$. Donc l'implication directe est fausse. De même, pour $a = -1$ et $b = 1$, on a bien $a = -1 \leqslant 1 = b$ et pourtant $\frac{1}{a} = -1 < 1 = \frac{1}{b}$. Donc l'implication réciproque est aussi fausse.

   1.3 $\boxed{(f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad (\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad (x < y) \;\Rightarrow\; (f(x) < f(y)))}$. En effet, si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors pour $y \in \mathbb{R}$, (on peut prendre $y = 1$ ou 12, en réalité peu importe, cela est vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors par la stricte croissance de f, $f(x) < f(y)$. La réciproque est fausse en général. Par exemple posons $f : x \mapsto -x^2$. Alors pour $y = 0$, on observe que si $x < 0$, on a bien $f(x) = -x^2 < 0 = f(0)$. Cela montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ mais f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par exemple $-1 < 2$ et pourtant on a $f(-1) = -1 > -4 = f(2)$. Donc l'implication réciproque est fausse. Pour avoir la réciproque, il aurait fallu donner la définition exacte de la stricte croissance qui est :

   $$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad (x < y) \;\Rightarrow\; (f(x) < f(y))$$

   1.4 $\boxed{(\ln(|x|) \geqslant 0) \quad \Leftrightarrow \quad ((x \geqslant 1) \;\text{ OU }\; (x \leqslant -1))}$. En effet, on a les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} \ln(|x|) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| \geqslant 1 \qquad \text{par croissance de la fonction logarithme sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant 1 \;\text{ OU }\; -x \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant 1 \;\text{ OU }\; x \leqslant -1. \end{aligned}$$

2. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un réel. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

   $$(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad f(x) \leqslant a \leqslant f(y)) \;\Rightarrow\; (\exists t \in \mathbb{R},\ f(t) = a).$$

   Solution. La réciproque est simplement

   $$\boxed{(\exists t \in \mathbb{R},\ f(t) = a) \;\Rightarrow\; (\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad f(x) \leqslant a \leqslant f(y)).}$$

   La contraposée est donnée par

   $$\boxed{(\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \neq a) \;\Rightarrow\; \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} f(x) > a \\ a \geqslant f(y) \end{cases}\right).}$$

   Enfin, la négation est

   $$\boxed{(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad f(x) \leqslant a \leqslant f(y)) \;\text{ ET }\; (\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \neq a).}$$

   NB : cette assertion dit que prend une valeur (plus exactement a une image) inférieure à a et une valeur supérieure à a, alors forcément, f passera par a. Bien entendu, lorsque f ***est continue*** *cette implication est vraie et s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires.*

3. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ecrire en une assertion mathématique le fait que la fonction f est constante sur les entiers relatifs, puis nier cette assertion.
Solution. L'assertion cherchée est
$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) = C.}$$
La négation est donc
$$\boxed{\forall C \in \mathbb{R},\ \exists p \in \mathbb{Z}, \quad f(p) \neq C.}$$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$ ..
Solution. Procédons par une récurrence double. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } u_n = 3^n + (-1)^n. \text{ »}$$
Initialisation. Si $n = 0$, alors $3^n + (-1)^n = 3^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2 = u_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Si $n = 1$, $3^n + (-1)^n = 3^1 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2 = u_1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\mathscr{P}(n) \text{ ET } \mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies :
$$u_n = 3^n + (-1)^n, \quad u_{n+1} = 3^{n+1} + (-1)^{n+1}.$$
Dès lors,
$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n && \text{par définition}\\
&= 2\left(3^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) + 3\left(3^n + (-1)^n\right)\\
&= 2 \times 3^{n+1} + 2 \times (-1)^{n+1} + 3^{n+1} + 3 \times (-1)^n\\
&= (2+1) \times 3^{n+1} + (-2+3) \times (-1)^n\\
&= 3 \times 3^{n+1} + (-1)^n\\
&= 3^{n+2} + (-1)^{n+1} && \text{car } (-1)^2 = 1.
\end{aligned}$$
Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + (-1)^n.}$$

5. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2+1} = x - 1$.
Solution. **Méthode 1 : par équivalents.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1 \geqslant 0$. Donc l'équation $\sqrt{x^2+1} = x - 1$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1} = x - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 1 = (x-1)^2 \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 \\ x \geqslant 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ x \geqslant 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{impossible.}
\end{aligned}$$
Conclusion, l'équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset.}$$
Méthode 2 : par analyse/synthèse. *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :
$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1} = x - 1 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + 1 = (x-1)^2\\
&\Rightarrow \quad x^2 + 1 = x^2 - 2x + 1\\
&\Rightarrow \quad 2x = 0\\
&\Rightarrow \quad x = 0.
\end{aligned}$$

Donc si x est une solution, alors $x = 0$.
Synthèse. Vérifions si le candidat est réellement une solution ou non. Si $x = 0$, alors $\sqrt{x^2+1} = 1$ et $x - 1 = -1 \neq \sqrt{x^2+1}$. Donc 0 n'est pas une solution.
Conclusion, l'équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset.}$$