

Correction de l'interrogation 20

Familles de vecteurs

1. (a) Définir et caractériser une famille liée.

Solution. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{L}$ est liée si et seulement si

- L'un des vecteurs au moins de $\mathcal{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{L}$
- i.e. il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, tel que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

- (b) Définir une famille génératrice.

Solution. Soient E un espace vectoriel non nul et $\mathcal{G}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{G}$ est génératrice dans E si et seulement si $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$.

- (c) Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.

Solution. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors,

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

2. Déterminer une famille génératrice de $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = 0\}$.

Solution. Soit $P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $P' = 3a_3 X^2 + 2a_2 X + a_1$. On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in E &\Leftrightarrow P'(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 = -3a_3 - 2a_2 \\ &\Leftrightarrow P = a_3 X^3 + a_2 X^2 - (3a_3 + 2a_2) X + a_0 = a_3 (X^3 - 3X) + a_2 (X^2 - 2X) + a_0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E = \text{Vect}(X^3 - 3X, X^2 - 2X, 1).$$

Conclusion,

$$\mathcal{G} = (X^3 - 3X, X^2 - 2X, 1) \text{ est une famille génératrice de } E.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $\left(A, A^2, A^3 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

Solution. On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= A A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}, \\ A^3 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aA + bA^2 + c(A^2 - 2I_2) = O_2$. Alors,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2a + 4b + 6c & a + 5b + 17c \\ 0 & 3a + 9b + 25c \end{pmatrix} = O_2 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b + 6c = 0 \\ a + 5b + 17c = 0 \\ 3a + 9b + 25c = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ a + 5b + 17c = 0 \\ 3a + 9b + 25c = 0 \end{cases} & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 3b + 14c = 0 \\ 3b + 16c = 0 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \end{aligned} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 3b + 14c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ & \Leftrightarrow a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\left(A, A^2, A^3 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est libre.}$$

4. Soit $\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto \text{ch}(x), x \mapsto \text{ch}(2x), x \mapsto \text{ch}(3x), x \mapsto \text{ch}(4x), x \mapsto \text{ch}(5x))$. On admet que $\mathcal{B}$ est libre et on pose $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$. Montrer que $f : x \mapsto \text{ch}^5(x)$ appartient à E et déterminer les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = \text{ch}^5(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5x} + 5e^{4x}e^{-x} + 10e^{3x}e^{-2x} + 10e^{2x}e^{-3x} + 5e^xe^{-4x} + e^{-5x}) \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5x} + 5e^{3x} + 10e^x + 10e^{-x} + 5e^{-3x} + e^{-5x}) \\ &= \frac{1}{2^4} \left(\frac{e^{5x} + e^{-5x}}{2} + 5 \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} + 10 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16} \text{ch}(5x) + \frac{5}{16} \text{ch}(3x) + \frac{5}{8} \text{ch}(x). \end{aligned}$$

Conclusion, les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$ sont

$$\left(0, \frac{5}{8}, 0, \frac{5}{16}, 0, \frac{1}{16} \right)$$

Bonus : montrons que $\mathcal{B}$ est bien une famille libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\left(x \mapsto \sum_{k=0}^5 \lambda_k \text{ch}(kx) \right) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^5 \lambda_k \text{ch}(kx) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = e^{-5x} \sum_{k=0}^5 \lambda_k \text{ch}(kx) = \sum_{k=0}^5 \lambda_k e^{-5x} \text{ch}(kx).$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$,

$$e^{-5x} \text{ch}(kx) = \frac{e^{(k-5)x} + e^{-(5+k)x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Tandis que

$$e^{-5x} \text{ch}(5x) = \frac{1 + e^{-10x}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Donc par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 = 0 + \frac{\lambda_5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_5 = 0.$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^4 \lambda_k \operatorname{ch}(kx) = 0_{\mathbb{R}}.$$

On réitère alors le processus pour montrer que $\lambda_4 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$ etc. Donc $\forall i \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est bien libre.

On pouvait aussi évaluer en 5 valeurs de x et ainsi obtenir un système de 5 équations avec 5 inconnues que l'on résout pour obtenir $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

5. Soit $F = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + c - d = 2a + 3c - 3d = 0 \right\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} a + c - d = 0 \\ 2a + 3c - 3d = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} a + c - d = 0 \\ -a = 0 \end{array} \right\} & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} c = d \\ a = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Les deux matrices n'étant pas colinéaires, $\mathcal{B}_F$ est libre. De plus $\mathcal{B}_F$ engendre F , $\mathcal{B}_F$ est donc une base de F .

Posons également $\mathcal{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Les deux matrices n'étant pas colinéaires, $\mathcal{B}_G$ est libre et par ce qui précède, $\mathcal{B}_G$ engendre G . Donc $\mathcal{B}_G$ est une base de G .

Posons enfin $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Vect}(\mathcal{B}) &= \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ &= \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) & C_2 \leftarrow -\frac{1}{2}C_2 \\ &= \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{base canonique de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a+b & a+b+c \\ a-b+d & d \end{pmatrix} = 0_2 & \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ a-b+d=0 \\ d=0 \end{cases} & \text{par unicité des coefficients d'une matrice} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ a-b=0 \\ d=0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ -2b=0 \\ d=0 \end{cases} & \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
 & \Leftrightarrow a=b=c=d=0.
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre. Or $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi,

- $\mathcal{B}_F$ est une base de F ,
- $\mathcal{B}_G$ est une base de G ,
- $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.