# Correction de l'interrogation 21
# Séries

1. (a) Enoncer le théorème de comparaison.
*Solution.* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que
$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$
Dans ce cas, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
Par contraposée, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

(b) Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?
*Solution.* Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique.
- On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.
- La converge absolue implique la convergence.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument car $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la série harmonique.

(c) Enoncer le théorème d'encadrement.
*Solution.* Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $I$ un voisinage de $a$, $f$, $g$ et $h$ trois éléments de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On suppose que
- pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,
- il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$.

Alors on a également $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}}{n}$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

*Solution.* On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$
Posons $u = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, $u^2 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $o(u) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc
$$\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
De même,
$$\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
D'où, par différence,
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} > 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$.
Conclusion, par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^3}{3^n}$.
*Solution. Méthode 1.* Appliquons la règle du $n^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 u_n = \frac{n^5}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant n^2 u_n \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{car } n^2 > 0.$$

Or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

*Méthode 2.* Appliquons le théorème de domination. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 u_n = \frac{n^5}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Autrement dit $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} > 0$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ converge. Donc par le théorème de domination, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. La convergence absolue entrainant la convergence, on conclut que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{a}{n}\right)^n$.
*Solution.* Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n| = \left|\left(\frac{a}{n}\right)^n\right| = \left(\frac{|a|}{n}\right)^n.$$

Or $\frac{|a|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{|a|}{n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \left]-1;1\right[$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)\right]$ converge et calculer sa somme totale.

*Solution.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k+2}\right)\right]$ et $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - a_{k+1}\right).$$

On reconnait alors une somme télescopique. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = a_1 - a_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n+2}\right).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2n+2}\right) = 0$. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)\right] \text{ converge}}$$

et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k+2}\right)\right] = \ln\left(\frac{3}{2}\right).}$$