Correction de l'interrogation 22
Dimension

1. (a) Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E. Alors
   - $\mathscr{F}$ est génératrice dans E si et seulement si $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = n$.
   - $\mathscr{F}$ est libre dans E si et seulement si $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = p$.
   - $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = n = p$.

   (b) Enoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.
Solution. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$
De plus, F et G sont supplémentaires dans E si (au moins) deux des assertions suivantes sont vérifiées :
   1. $F \cap G = \{0_E\}$.
   2. $F + G = E$.
   3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

   (c) Donner la forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit Δ le discriminant de (E_c) : $r^2 - ar - b$.
   - Si $\Delta > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les deux racines de (E_c),
$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
   - Si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 l'unique racine de (E_c),
$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\lambda + \mu n)\, r_0^n.$$
   - Si $\Delta < 0$, alors en notant $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ et $r_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\,\theta}$ les deux racines complexes de (E_c),
$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = r^n\left(\lambda\cos(n\,\theta) + \mu\sin(n\,\theta)\right).$$

2. Déterminer la dimension de $E = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr}(M) = 0\}$.
Solution. On a les égalités suivantes entre espaces vectoriels :
$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_E}. \end{aligned}$$
Montrons que $\mathscr{B}_E$ est libre. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$
Alors,
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \quad \text{par unicité des coefficients d'une matrice} \\ &\Leftrightarrow \quad a = b = c = 0. \end{aligned}$$
Donc $\mathscr{B}_E$ est libre. Par ce qui précède $\mathscr{B}_E$ est génératrice de E. Donc $\mathscr{B}_E$ est une base de E. Conclusion,
$$\boxed{\dim(E) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_E) = 3.}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in F \quad &\Leftrightarrow \quad AM = MA \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = b \\ d = a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = aI_2 + bA. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \operatorname{Vect} \underbrace{(I_2, A)}_{=\mathscr{B}_F}.$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F. De plus $\mathscr{B}_F$ est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\dim(F) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_F) = 2$. Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $G = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_G)$. Par définition $\mathscr{B}_G$ engendre G et de plus $\mathscr{B}_G$ est libre car est composée de deux matrices non colinéaires. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G et donc $\dim(G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = 2$. On a donc

$$\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})).$$

Méthode 1 : par le caractère libre. Soit $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Dès lors,

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Donc par le théorème de la base adaptée, $F \oplus G$.
Or $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Donc

$$\boxed{F \oplus G = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Méthode 2 : par le rang. Soit $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang. D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\mathscr{B}) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) && \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{matrix} \\ &= \operatorname{rg}(\mathscr{B}_{can}) && \text{on reconnait la base canonique} \\ &= \operatorname{Card}(\mathscr{B}_{can}) = 4. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{rg}(\mathscr{B}) = 4 = \operatorname{Card}(\mathscr{B})$ donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\operatorname{rg}(\mathscr{B}) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ donc $\mathscr{B}$ est génératrice. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{F \oplus G = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

4. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la famille $\mathscr{F} = \left(f_k : x \mapsto \cos\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)\right)_{k \in [\![0;4]\!]}$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.
Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\\
f_2(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\\
f_3(x) &= \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\\
f_4(x) &= \cos(x + \pi) = -\cos(x).
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{F}) &= \mathrm{rg}\left(\cos, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin, -\sin, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin, -\cos\right)\\
&= \mathrm{rg}(\cos, 0_E, -\sin, 0_E, 0_E) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_3\\ C_4 \leftarrow C_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_3\\ C_5 \leftarrow C_5 + C_1 \end{array}\\
&= \mathrm{rg}(\cos, -\sin)\\
&= \mathrm{rg}(\cos, \sin) && C_2 \leftarrow -C_2.
\end{aligned}$$

Or les fonctions cos et sin ne sont pas colinéaires donc $(\cos, \sin)$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 2.}$$

5. Montrer que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x - 2y + 3z = 0\\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + z = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Solution. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 0\\ x - y + z = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 0\\ y - 2z = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2y - 3z = 4z - 3z = z\\ y = 2z \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad u = (z, 2z, z).
\end{aligned}$$

Donc

$$F = \mathrm{Vect}\underbrace{((1,2,1))}_{=\mathscr{B}_F}.$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre donc F et est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. D'où

$$\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 1.$$

De même, soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in G \quad &\Leftrightarrow \quad x + 2y + z = 0\\
&\Leftrightarrow \quad z = -x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad u = (x, y, -x-2y) = x(1,0,-1) + y(1,0,-2).
\end{aligned}$$

Donc

$$G = \mathrm{Vect}\underbrace{((1,0,-1),(1,0,-2))}_{=\mathscr{B}_G}.$$

La famille $\mathscr{B}_G$ engendre donc G et est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G. D'où

$$\dim(G) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_G) = 2.$$

On observe donc bien que
$$\dim(F) + \dim(G) = 1 + 2 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Méthode 1, par l'intersection. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in F \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad x = y = z = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u = 0_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

Donc
$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Conclusion,
$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

Méthode 2, par la somme. Par ce qui précède,

$$\begin{aligned}
F + G &= \mathrm{Vect}\left((1,2,1)\right) + G = \mathrm{Vect}\left((1,0,-1), (1,0,-2)\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left((1,2,1), (1,0,-1), (1,0,-2)\right).
\end{aligned}$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré,

$$\begin{aligned}
F + G &= \mathrm{Vect}\left((1,2,1), (0,-2,-2), (0,-2,-3)\right) \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left((1,2,1), (0,-2,-2), (0,0,-1)\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\
&= \mathrm{Vect}\left((1,2,1), (0,1,1), (0,0,1)\right) \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow -\frac{1}{2}C_2 \\ C_3 \leftarrow -C_3 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left((1,2,0), (0,1,0), (0,0,1)\right) \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{array} \\
&= \mathrm{Vect}\left((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\right) \qquad C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 \\
&= \mathbb{R}^3 \qquad \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Conclusion,
$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

Méthode 3, par le théorème de la base adaptée. Soit $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$.

- On montre que $\mathscr{B}$ est libre par la définition. On en déduit par le théorème de la base adaptée que $F \oplus G$ puis par $\dim(F) = \dim(G) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$ que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
- On montre que $\mathscr{B}$ est libre par la définition. Or $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Donc $\mathscr{B}$ base de $\mathbb{R}^3$ et on conclut par le théorème de la base adaptée que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
- On montre que $\mathrm{rg}(\mathscr{B}) = 3$ par opérations élémentaires. On en déduit que $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \mathrm{rg}(\mathscr{B})$ et on retrouve que $\mathscr{B}$ est libre puis on peut ajouter que $\mathrm{rg}(\mathscr{B}) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$ donc $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et on conclut que $\mathscr{B}$ est une base, par le théorème de la base adaptée $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.