

Interrogation 26
Intégration

Nom/Prénom :

Note :

1. (a) Énoncer le théorème de Weierstrass.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{n} \right) - \ln(n)$. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \int_{x^3}^{x^2} \ln(8+t) \cos(2t) dt$ et donner une expression de sa dérivée.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n + 1$ pour la fonction $f : t \mapsto \operatorname{sh}(2t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}_+$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\operatorname{sh}(2x) \frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....