Correction de l'interrogation 26
Intégration

1. (a) Enoncer le théorème de Weierstrass.
Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a; b])$. Alors,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in \mathscr{E}([a; b]),\ \forall x \in [a; b], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$
(b) Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a; b])$. Alors,
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \sup_{z\in[a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
(c) Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?
Solution. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique.
   - On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.
   - La converge absolue implique la convergence.
   - La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument car $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut commencer à observer que $x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $[0; 1]$. Donc I_n existe. De plus, pour tout $x \in [0; 1]$, on a
$$\begin{aligned} 1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < 1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x^n \geqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}x^n \qquad \text{CAR } x^n \geqslant 0. \end{aligned}$$
Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,
$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \geqslant I_n \geqslant \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{2}x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$
Or
$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$
Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Donc par le théorème d'encadrement, $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$ et
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$
On pouvait aussi montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone mais cela ne nous donnait pas la limite.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)}{n}\right) - \ln(n)$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)}{n} - \ln(n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] - \ln(n) \\ &= \frac{n\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) - \ln(n) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

Posons $a = 1$, $b = 2$ et $f : t \mapsto \ln(t)$. La fonction f est continue sur $[1;2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

On reconnaît donc une somme de Riemann et puisque f est continue sur $[1;2]$, on en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_{t=1}^{t=2} = 2\ln(2) - 2 - (-1) = 2\ln(2) - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\ln(2) - 1.}$$

On pouvait aussi poser $a = 0$, $b = 1$ et $f : t \mapsto \ln(1+t)$. On obtient $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ que l'on calcule par le changement de variable $s = 1+t$ et on se ramène alors bien à la même intégrale que ci-dessus.

4. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \int_{x^3}^{x^2} \ln(8+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.
Solution. Soit $f : t \mapsto \ln(8+t)\cos(2t)$. La fonction f est définie et même continue sur $]-8;+\infty[$. Soit $x \in]-2;+\infty[$. Alors, $x^3 \in]-8;+\infty[$ et $x^2 \in [0;+\infty[$ et même $\left[x^3;x^2\right] \subseteq]-8;+\infty[$ ou $\left[x^2;x^3\right] \subseteq]-8;+\infty[$. Donc f est continue sur $\left[x^3;x^2\right]$ ou $\left[x^2;x^3\right]$. Donc $\varphi(x)$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in]-2;+\infty[$. On en déduit que φ est bien définie sur $]-2;+\infty[$. A l'inverse, si $x \leqslant -2$, alors $x^3 \leqslant -8$ et donc $\left[x^3;x^2\right]$ n'est pas inclus dans $]-8;+\infty[$ et $\varphi(x)$ n'existe pas. Posons pour tout $x \in]-2;+\infty[$,

$$F(x) = \int_0^x \ln(8+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, F est définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $]-8;+\infty[$ et pour tout $x \in]-8;+\infty[$, $F'(x) = f(x)$. Or, pour tout $x \in]-2;+\infty[$,

$$\varphi(x) = \int_{x^3}^{x^2} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x^3} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = F\left(x^2\right) - F\left(x^3\right).$$

La fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $]-8;+\infty[$, $u : x \mapsto x^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-2;+\infty[$ et $u(]-2;+\infty[) = [0;+\infty[\subseteq]-8;+\infty[$. De même, $v : x \mapsto |x|$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-2;+\infty[$ et $v(]-2;+\infty[) =]-8;+\infty[$. Donc par composition et différence, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-2;+\infty[$ et pour tout $x \in]-2;+\infty[$,

$$\varphi'(x) = 2xF'\left(x^2\right) - 3x^2F'\left(x^3\right) = 2x\ln\left(8+x^2\right)\cos\left(2x^2\right) - 3x^2\ln\left(8+x^3\right)\cos\left(2x^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]-2;+\infty[, \qquad \varphi'(x) = 2x\ln\left(8+x^2\right)\cos\left(2x^2\right) - 3x^2\ln\left(8+x^3\right)\cos\left(2x^3\right).}$$

5. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n+1$ pour la fonction $f : t \mapsto \operatorname{sh}(2t)$ aux points $a = 0$ et $b = x \in \mathbb{R}_+$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\operatorname{sh}(2x)\,\frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

   Solution. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est définie et même $\mathscr{C}^{2n+2}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;x]$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange,
$$\left|\operatorname{sh}(2x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k\right| \leqslant \sup_{z\in[0;x]} \left|f^{(2n+2)}(z)\right| \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!}$$
   Or pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in [\![0;n]\!]$,
$$f^{(2k)}(t) = 2^{2k}\operatorname{sh}^{(2k)}(2t) = 2^{2k}\operatorname{sh}(2t) \qquad \text{et} \qquad f^{(2k+1)}(t) = 2^{2k+1}\operatorname{sh}^{(2k+1)}(2t) = 2^{2k+1}\operatorname{ch}(2t)\,.$$
   Notamment,
$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^{(2k+1)}(0) = 2^{2k+1}.$$
   De plus, par croissance de la fonction sh sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $z \in [0;x]$,
$$0 = 2^{2n+2}\operatorname{sh}(0) \leqslant f^{(2n+2)}(z) = 2^{2k}\operatorname{sh}(2z) \leqslant 2^{2n+2}\operatorname{sh}(2x)\,.$$
   Donc $\sup_{z\in[0;x]}\left|f^{(2n+2)(z)}\right| \leqslant 2^{2n+2}\operatorname{sh}(2x)$. Ainsi,
$$\left|\operatorname{sh}(2x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right| \leqslant 2^{2k}\operatorname{sh}(2x)\,\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$
   Donc
$$\left|\operatorname{sh}(2x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \operatorname{sh}(2x)\,\frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$
   Conclusion,
$$\boxed{\left|\operatorname{sh}(2x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \operatorname{sh}(2x)\,\frac{(2x)^{2n+2}}{(2n+2)!}}$$
   On pouvait aussi retrouver ce résultat en appliquant l'inégalité à sh *entre* 0 *et* u *puis en prenant* $u = 2x$.