Correction de l'interrogation 27
Probabilités

1. (a) Enoncer la formule de Bayes.
Solution. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors,
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(b) Définir les deux types d'indépendance pour une famille d'évènements.
Solution. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$.

i. On dit que les $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ sont indépendants deux à deux si et seulement si
$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j, \qquad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

ii. On dit que les $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ sont indépendants si et seulement si
$$\forall J \subseteq [\![1;p]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i).$$

(c) Enoncer le théorème de la base extraite.
Solution. Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie. De toute famille $\mathscr{G}$ finie de vecteurs de E, génératrice dans E, il existe une sous-famille $\mathscr{B}$ de $\mathscr{G}$ qui soit une base de E.

2. Une urne possède dix boules vertes, six boules oranges et quatre boules rouges. On tire successivement et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité que la première boule soit verte sachant que la seconde est orange ?
Solution. Pour $i \in \{1;2\}$, on note V_i, respectivement O_i, R_i l'évènement la boule au tirage i est de couleur verte, respectivement orange, rouge. On cherche $\mathbb{P}(V_1 \mid O_2)$. On note que $\mathbb{P}(0_2) \neq 0$ car l'on a plus qu'une seule boule orange. Dès lors, par la formule de Bayes, on a
$$\mathbb{P}(V_1 \mid O_2) = \frac{\mathbb{P}(O_2 \mid V_1)\mathbb{P}(V_1)}{\mathbb{P}(O_2)}.$$
Si l'on pioche une boule verte, il nous reste 9 boules vertes, 6 oranges et 4 rouges. Donc $\mathbb{P}(O_2 \mid V_1) = \frac{6}{9+6+4} = \frac{6}{19}$. De plus au premier tirage on a 10 boules vertes parmi les $10+6+4 = 20$ boules. Donc $\mathbb{P}(V_1) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Enfin, on note que (V_1, O_1, R_1) forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(O_2) = \mathbb{P}(O_2 \mid V_1)\mathbb{P}(V_1) + \mathbb{P}(O_2 \mid O_1)\mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_2 \mid R_1)\mathbb{P}(R_1).$$
En raisonnant comme précédemment, on obtient :
$$\mathbb{P}(O_2) = \frac{6}{19}\frac{10}{20} + \frac{5}{19}\frac{6}{20} + \frac{6}{19}\frac{4}{20} = \frac{60+30+24}{19\times 20} = \frac{114}{19\times 20}.$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}(V_1 \mid O_2) = \frac{\frac{6}{19}\times\frac{10}{20}}{\frac{114}{19\times 20}} = \frac{60}{114} = \frac{30}{57} = \frac{10}{19}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(V_1 \mid O_2) = \frac{10}{19}.}$$

3. L'urne U_1 contient 3 boules vertes et 2 boules rouges. L'urne U_2 contient 3 boules vertes et 3 boules rouges. On pioche de façon équiprobable une boule dans l'urne U_1 et on l'ajoute à l'urne U_2. On pioche alors de façon équiprobable dans l'urne U_2. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule verte à l'issue du second tirage ?
Solution. Soit V_i l'évènement obtenir une boule verte au tirage $i \in \{1;2\}$. On cherche $\mathbb{P}(V_2)$. On sait que $\left(V_1, \overline{V_1}\right)$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(V_2) = \mathbb{P}(V_2 \mid V_1)\mathbb{P}(V_1) + \mathbb{P}\left(V_2 \mid \overline{V_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{V_1}\right).$$

Or le tirage étant uniforme dans l'urne 1 et celle-ci contenant 3 vertes parmi 5 boules, on a

$$\mathbb{P}(V_1) = \frac{3}{5}.$$

De même (ou en passant au complémentaire) $\mathbb{P}\left(\overline{V_1}\right) = \frac{2}{5}$. De plus, si l'on a pioché une boule verte i.e. si V_1 est réalisé alors U_2 contient 4 vertes parmi 7 boules. Le second tirage étant aussi uniforme, on a

$$\mathbb{P}(V_2 \mid V_1) = \frac{4}{7}.$$

De même, si $\overline{V_1}$ est réalisé, U_2 contient 3 vertes parmi 7 boules. D'où, $\mathbb{P}\left(V_2 \mid \overline{V_1}\right) = \frac{3}{7}$. De là, on en déduit que

$$\mathbb{P}(V_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{12+6}{35} = \frac{18}{35}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(V_2) = \frac{18}{35}.}$$

4. On dispose de deux pièces l'une équilibrée et l'autre truquée retournant pile avec une probabilité $2/3$. Au premier lancer on choisit de façon équiprobable l'une des deux pièces. Puis à chaque étape, on lance la pièce, si l'on obtient pile, on change de pièce à l'étape suivante et sinon on garde la même pièce. Quelle est la probabilité d'avoir lancer la pièce équilibrée puis la pièce truquée et enfin la pièce équilibrée dans cet ordre ?
Solution. Pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, notons T_i l'évènement « lancer la pièce truquée au i-ième lancer » et A « avoir lancé la pièce équilibré puis celle truquée et enfin celle équilibrée ». Alors on a

$$A = \overline{T_1} \cap T_2 \cap \overline{T_3}.$$

Or $\mathbb{P}\left(\overline{T_1} \cap T_2\right) \neq 0$, donc par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}\left(\overline{T_1} \cap T_2 \cap \overline{T_3}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{T_3} \mid \overline{T_1} \cap T_2\right) \mathbb{P}\left(T_2 \mid \overline{T_1}\right) \mathbb{P}\left(\overline{T_1}\right).$$

On choisit la première pièce de façon uniforme parmi les deux pièces donc $\mathbb{P}\left(\overline{T_1}\right) = \frac{1}{2}$. Puis si l'on a lancé la pièce équilibrée, on a $1/2$ d'avoir obtenu pile et donc de changer de pièce :

$$\mathbb{P}\left(T_2 \mid \overline{T_1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Mais sachant T_2 i.e. que l'on a lancé la pièce truquée, on a alors 2 chance sur 3 d'obtenir pile et donc de rechanger de pièce :

$$\mathbb{P}\left(\overline{T_3} \mid \overline{T_1} \cap T_2\right) = \frac{2}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{T_1} \cap T_2 \cap \overline{T_3}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.}$$

5. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On suppose que $X(\Omega) = \{0,1\}$, $Y(\Omega) = \{1,2,3\}$. De plus, on donne les probabilités suivantes :

$\mathbb{P}(X=i, Y=j) =$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=0$	$2/12$	$1/12$	$1/12$
$i=1$	$4/12$	$3/12$	$1/12$

Déterminer si les évènements $(X=1)$ et $(Y=2)$ sont indépendants ou non.
Solution. Puisque $X(\Omega) = \{0,1\}$, alors $((X=0),(X=1))$ forme un système complet d'évènement. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(Y=2, X=0) + \mathbb{P}(Y=2, X=1).$$

Donc par le tableau,

$$\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

De même, $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, alors $((Y = 1), (Y = 2), (Y = 3))$ forme un système complet d'évènement. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 3).$$

Donc par le tableau,

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Or toujours d'après le tableau, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{9}$. Donc

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) \neq \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 2).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les évènements } (X = 1) \text{ et } (Y = 2) \text{ ne sont pas indépendants.}}$$