Correction de l'interrogation 28
Représentation matricielle

1. (a) Préciser l'isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices. Quelle est la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$?
Solution. Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E et F deux espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Alors, l'application

$$\Phi : \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$f \mapsto \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f),$$

forme un isomorphisme. En particulier $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np$.

(b) Enoncer la proposition donnant le vecteur image.
Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $x \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Notons $X = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$, $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ et $Y = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x))$. Alors

$$Y = AX.$$

(c) Donner la notation pour l'ensemble des parties d'un ensemble. Lorsque E est fini en donner son cardinal.
Solution. Soit E un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$ et son cardinal est

$$\operatorname{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n.$$

2. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(1)X^2 + P'(1)X + P''(1) \end{array}$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) = \left(1, X, X^2 + 3X\right)$. On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et en déduire $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Solution. Calculons les images de $\mathscr{B}$ par f. On a

$$\boxed{f(e_1) = f(1) = X^2, \qquad f(e_2) = f(X) = X^2 + X, \qquad f(e_3) = f\left(X^2 + X\right) = 4X^2 + 5X + 2.}$$

On observe alors que

$$f(e_1) = X^2 + 3X - 3X = e_3 - e_2.$$

Donc

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f(1)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De même, $f(e_2) = X^2+3X-2X = e_3-2e_2$ donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f(X)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Enfin, $f\left(X^2+3X\right) = 4X^2+5X+2 = 4\left(X^2+3X\right) - 7X + 2 = 4e_3 - 7e_2 + 2e_1$. D'où $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(f\left(X^2\right)\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.}$$

3. Soient $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B} = \left(X^2+1, X-1, X(X-1)\right)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
Solution. Soit $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{lll}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Avez-vous vérifié votre résultat ?

$P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$ donc $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ est inversible. Donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$. De plus,

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on donne $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Deux méthodes : vous pouvez faire les deux, 2 points par méthode faite.

Solution. Méthode 1, par la formule de changement de base. Soit $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, d'après l'énoncé, on a

$$P^{-1} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Par la formule de changement de base,

$$\begin{aligned}
D &= P^{-1}AP \\
&= P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}.}$$

Méthode 2, par le calcul des images. Notons $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$, $A=\begin{pmatrix}1&7&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$. Puisque l'on est dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$f(e_1)=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(e_1))=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f)\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(e_1)=Ae_1=\begin{pmatrix}1&7&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Donc $f(e_1)=0_{3,1}$. De même,

$$f(e_2)=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(e_2))=\begin{pmatrix}1&7&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\end{bmatrix}=-e_2.$$

Enfin,

$$f(e_3)=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(e_3))=\begin{pmatrix}1&7&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\\5\end{bmatrix}=5e_3.$$

Ainsi, $f(e_1)=0$, $f(e_2)=-e_2$ et $f(e_3)=5e_3$. Conclusion,

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}.}$$

5. Déterminer le noyau, l'image et le rang de $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&0\\-1&-1&-3\end{pmatrix}$.

Solution. Méthode 1. On observe d'une part que $C_3=3C_1$. Donc le vecteur $\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\in\operatorname{Ker}(A)$. Nécessairement, $\dim(\operatorname{Ker}(A))\geqslant 1$ et par le théorème du rang, $\operatorname{rg}(A)\leqslant 2$. De plus, C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires. Donc $\operatorname{rg}(A)\geqslant 2$. Ainsi, $\operatorname{rg}(A)=2$. De plus, C_1 et C_2 sont deux vecteurs non colinéaires de l'image donc forment une base de l'image : $\operatorname{Im}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}\right)$. Enfin, $\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur non nul du noyau et par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(A))=3-\operatorname{rg}(A)=2$. Donc $\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A)=2,\qquad \operatorname{Im}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}\right),\qquad \operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right).}$$

Méthode 2 pour le noyau. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad AX = 0_{3,1} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x - y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y = 0 \\ -x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -3z \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} -3z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

Méthode 2 pour l'image. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{array} \\
&= \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)}_{\mathscr{B}_I} && C_2 \leftarrow \tfrac{1}{2} C_2
\end{aligned}$$

On note que les deux vecteurs de $\mathscr{B}_I$ ne sont pas colinéaires et engendrent $\operatorname{Im}(A)$ et forment donc une base de $\operatorname{Im}(A)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).}$$

Naturellement la donnée du noyau OU de l'image suffit pour obtenir le rang de A. Méthode 2 pour le rang. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2.
\end{aligned}$$

La dernière matrice étant triangulaire avec deux pivots, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = 2.}$$