Correction de l'interrogation 29
Révisions I

1. (a) Enoncer le théorème de la bijection.

   Solution. Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Si
   - f est continue sur I,
   - et strictement monotone sur I,

   alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus sa réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I, continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).

   (b) Enoncer la proposition donnant l'inverse du produit.

   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ puis **à l'aide du théorème de primitivation du développement limité,** celui de f' à l'ordre 3 en 0.

   Solution. On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Donc
$$f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}.$$
   On sait que $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Alors,
   - $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,
   - de plus,
$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$
   - Enfin, $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

   Ainsi,
$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} e\,\mathrm{e}^{u(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{\mathrm{e}\,x^2}{2} + \tfrac{\mathrm{e}\,x^4}{24} + o\left(x^4\right) \\ &\qquad\qquad\;\; + \tfrac{\mathrm{e}\,x^4}{8} + o\left(x^4\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad + o\left(x^4\right). \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{\mathrm{e}\,x^2}{2} + \frac{4\,\mathrm{e}\,x^4}{24} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{\mathrm{e}\,x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}\,x^4}{6} + o\left(x^4\right).}$$
   La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont. Donc f' est $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de Taylor-Young,
$$\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad f'(x) \underset{x\to 0}{=} a + bx + cx^2 + dx^3 + o\left(x^3\right).$$
   La fonction f étant une primitive de la fonction f, par le théorème de primitivation des développements limités,
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

Par ce qui précède et l'unicité du développement limité, on a

$$\begin{cases} f(0)=1 \text{ ok!} \\ a=0 \\ \frac{b}{2}=-\frac{\mathrm{e}}{2} \\ \frac{c}{3}=0 \\ \frac{d}{4}=\frac{\mathrm{e}}{6} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a=c=0 \\ b=-\mathrm{e} \\ d=\frac{2\,\mathrm{e}}{3}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} -\mathrm{e}\,x+\frac{2\,\mathrm{e}}{3}x^3+o\left(x^3\right).}$$

3. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}$, une racine n-ième de l'unité différente de 1. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} k\,\omega^k$. A l'aide d'une inversion d'indice, montrer que $S_n\in i\mathbb{R}$.
Solution. Posons $\tilde{k}=n-k$. Alors, quand $k=0$, $\tilde{k}=n$ et quand $k=n$, $\tilde{k}=0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{\tilde{k}=0}^{n}\left(n-\tilde{k}\right)\omega^{n-\tilde{k}} &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\,\omega^{n-k} \qquad \text{car l'indice est muet} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\,\omega^{-k} \qquad \text{car } \omega\in\mathbb{U}_n \\ &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\,\overline{\omega}^k \qquad \text{car } \omega\in\mathbb{U} \\ &= n\sum_{k=0}^{n}\overline{\omega}^k-\sum_{k=0}^{n}k\overline{\omega}^k \\ &= 0-\sum_{k=0}^{n}k\overline{\omega}^k \qquad \text{car } \overline{\omega}\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\} \\ &= -\overline{\left(\sum_{k=0}^{n}k\,\omega^k\right)} \qquad \text{car } k\in\mathbb{R} \\ &= -\overline{S_n}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n\in i\mathbb{R}.}$$

4. On possède six jetons dont un seul est un jeton gagnant. On lance un dé équilibré à six faces puis l'on pioche de façon équiprobable autant de jetons qu'indiqué par le dé. Calculer la probabilité d'obtenir le jeton gagnant.
Solution. Soit X la variable aléatoire retournant le résultat du dé : $X\sim\mathscr{U}\left([\![1;6]\!]\right)$. Soit G l'évènement « obtenir le jeton gagnant ». On cherche $\mathbb{P}(G)$. La famille $(X=k)_{k\in[\![1;6]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(G)=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}\left(G \mid X=k\right)\mathbb{P}\left(X=k\right).$$

Si l'on a $(X=k)$, on a pioché k jetons parmi les 6 possibles. La probabilité étant uniforme parmi les jetons, on a alors k chances sur 6 d'avoir le jeton gagnant : $\mathbb{P}\left(G \mid X=k\right)=\frac{k}{6}$. De plus, le dé étant équilibré : $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{1}{6}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(G)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6}\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\frac{6\times 7}{2}=\frac{7}{12}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(G)=\frac{7}{12} \qquad \text{la probabilité d'avoir obtenu le jeton gagnant est de } \frac{7}{12}.}$$

5. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. A l'aide de $B = A - I_2$, calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

   Solution. On a $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc

$$B^2 = 9 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

   Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $B^k = 0_2$. De plus, B et I_2 commutent. Donc, par la formule du binôme de Newton, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$,

$$A^p = (I_2 + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{k}{p} B^k I_2^{p-k} = I_2 + pB + 0_2.$$

   Cette formule reste vraie si $p = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \begin{pmatrix} 1+3p & 3p \\ -3p & 1-3p \end{pmatrix}.}$$