Correction de l'interrogation 02
Fonctions réelles

1. (a) Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
Solution. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq \mathbb{R}$.
   - L'image directe de A par f est
$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}.$$
   - L'image réciproque de B par f est
$$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$

   (b) Soient $a \in \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. Comment obtient-on le graphe de $g_1 : x \mapsto f(x) + a$? de $g_2 : x \mapsto f(x+a)$? de $g_3 : x \mapsto af(x)$? de $g_4 : x \mapsto f(ax)$?
Solution. A partir du graphe de f, on obtient le graphe de
   - g_1 par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
   - g_2 par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
   - g_3 par une dilatation/contraction verticale de coefficient a.
   - g_4 par une dilatation/contraction horizontale de coefficient $\frac{1}{a}$.

2. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)}{e^{2x} - e^{-2x}}$. Déterminer le domaine de définition de f puis déterminer sa parité.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :
$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2-4} > 0 \\ e^{2x} - e^{-2x} \neq 0 \end{cases}$$
Or
$$e^{2x} - e^{-2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$
Ainsi,
$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 > 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 2 \text{ OU } x < -2 \\ x \neq 0. \end{cases}$$
Ainsi, le domaine de définition de f est
$$\boxed{\mathscr{D}_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[\,.}$$
On a les points suivants :
   - $\mathscr{D}_f$ est centré en 0.
   - Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,
$$f(-x) = \frac{\ln\left(\sqrt{(-x)^2 - 4}\right)}{e^{-2x} - e^{2x}} = \frac{\ln\left(\sqrt{x^2-4}\right)}{-\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)} = -f(x).$$

Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

3. Montrer que l'équation $\frac{x^2}{2} + 5 = e^x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.
Solution. Posons $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2} - 5$. L'équation est alors équivalente à $f(x) = 0$. La fonction f est définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = e^x - x.$$
Or on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1 > x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 1 - 5 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. Dès lors, on a

- f est continue sur $[0;+\infty[$,
- f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
- $0 \in \left[f(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

Donc par le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) :

$$\exists! \alpha \in [0;+\infty[\,, \qquad f(x) = 0.$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{l'équation } \frac{x^2}{2} + 5 = \mathrm{e}^x \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+.}$$

4. Déterminer le tableau de variations de $g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ sur son domaine de définition.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$g(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x > 0.$$

La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - \ln(x)}{2x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2-\ln(x)}{2x\sqrt{x}} > 0 \qquad & \Leftrightarrow \qquad 2 - \ln(x) > 0 \qquad \text{car } 2x\sqrt{x} > 0 \\ & \Leftrightarrow \qquad 2 > \ln(x) \\ & \Leftrightarrow \qquad x < \mathrm{e}^2. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
g		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Or

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

Puis $g\left(\mathrm{e}^2\right) = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)}{\sqrt{\mathrm{e}^2}} = \frac{2}{\mathrm{e}} = 2\,\mathrm{e}^{-1}$. Enfin, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Conclusion,

x	0		e^2		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$+\infty$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les dérivées n-ièmes de $h : x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$.
Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} h(x) &= x\,\mathrm{e}^x \\ h'(x) &= \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x \\ h''(x) &= \mathrm{e}^x + (x+1)\,\mathrm{e}^x = (x+2)\,\mathrm{e}^x \\ h^{(3)}(x) &= \mathrm{e}^x + (x+2)\,\mathrm{e}^x = (x+3)\,\mathrm{e}^x\,. \end{aligned}$$
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n)}(x) = (x+n)\,\mathrm{e}^x. »$$
Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x\,\mathrm{e}^x = (x+0)\,\mathrm{e}^x$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h^{(n)}(x) = (x+n)\,\mathrm{e}^x\,.$$
En dérivant car $h^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h^{(n+1)}(x) = \left(h^{(n)}\right)'(x) = \mathrm{e}^x + (x+n)\,\mathrm{e}^x = (x+n+1)\,\mathrm{e}^x\,.$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{h \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h^{(n)}(x) = (x+n)\,\mathrm{e}^x\,.}$$

6. *Bonus :* pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les dérivées n-ièmes de $H : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{2x}$.
Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction H est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} H(x) &= x\,\mathrm{e}^{2x} \\ H'(x) &= \mathrm{e}^{2x} + 2x\,\mathrm{e}^{2x} = (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x} \\ H''(x) &= 2\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,(2x+1)\,\mathrm{e}^{2x} = (4x+4)\,\mathrm{e}^{2x} \\ H^{(3)}(x) &= 4\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,(4x+4)\,\mathrm{e}^{2x} = (8x+12)\,\mathrm{e}^{2x} \\ H^{(4)}(x) &= 8\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,(8x+12)\,\mathrm{e}^{2x} = (16x+32)\,\mathrm{e}^{2x}\,. \end{aligned}$$
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \forall x \in \mathbb{R},\ H^{(n)}(x) = \left(2^n x + n2^{n-1}\right)\mathrm{e}^{2x}. »$$
Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(2^n x + n2^{n-1}\right)\mathrm{e}^x = \left(2^0 x + 0\right)\mathrm{e}^{2x} = x\,\mathrm{e}^{2x} = H(x)$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H^{(n)}(x) = \left(2^n x + n2^{n-1}\right)\mathrm{e}^{2x}\,.$$
En dérivant car $H^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient,
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad H^{(n+1)}(x) &= \left(H^{(n)}\right)'(x) \\ &= 2^n\,\mathrm{e}^x + 2\left(2^n x + n2^{n-1}\right)\mathrm{e}^{2x} \\ &= \left(2^n + 2^{n+1}x + n2^n\right)\mathrm{e}^{2x} \\ &= \left(2^{n+1}x + (n+1)\,2^n\right)\mathrm{e}^{2x}\,. \end{aligned}$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{H \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H^{(n)}(x) = \left(2^n x + n2^{n-1}\right)\mathrm{e}^{2x}\,.}$$