Correction de l'interrogation 30
Couples de variables aléatoires

1. (a) Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

   Solution. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a
   $$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

   (b) Enoncer la propriété sur la somme de deux binomiales.

   Solution. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p \in [0;1]$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$ deux variables aléatoires définies sur Ω. Si X et Y sont indépendantes, alors
   $$X + Y \sim \mathscr{B}(n+m, p).$$

   (c) Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.

   Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors
   - le noyau de f est défini par
   $$\mathrm{Ker}(f) = \{ x \in E \mid f(x) = 0_F \}.$$
   - l'image de f est définie par
   $$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x) \}.$$

2. Euler va au cinéma avec 4 de ses amis. Quatre films sont à l'affiche. On suppose que les cinq compagnons choisissent uniformément et indépendamment les uns des autres le film qu'ils vont visionner. On note X le nombre de personnes ayant choisi le film 1. Reconnaître la loi de X et préciser la probabilité que 2 personnes exactement aient choisi le film 1.

   Solution. Puisque le choix est uniforme, chaque compagnon a une chance sur quatre de choisir le film 1. On considère l'évènement « choisir le film 1 » comme un succès. Alors, X comptabilise le nombre de succès lors de la réalisation de 5 expériences de Bernoulli identiques (chaque compagnon choisit le film 1 avec la même probabilité) et indépendantes. Donc
   $$\boxed{X \sim \mathscr{B}\left(5, \frac{1}{4}\right).}$$
   Dès lors,
   $$\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2} \frac{1}{4^2} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2!3!} \frac{3^3}{4^5} = \frac{5 \times 4}{2} \frac{27}{4^5} = \frac{5 \times 27}{2^9} = \frac{135}{512}.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\mathbb{P}(X=2) = \frac{135}{512}.}$$

3. On possède trois boites numérotées de 1 à 3. La boite numéro $k \in [\![1;3]\!]$ possède k boules numérotées de 1 à k. On tire de façon équiprobable une boite puis dans cette boite on tire de façon équiprobable une boule. On note X le numéro de la boite obtenue et Y le numéro de la boule obtenue. Donner la loi conjointe de X et Y dans un tableau en justifiant uniquement $\mathbb{P}(Y=1, X=2)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

   Solution. Par la formule des probabilités composées,
   $$\mathbb{P}(Y=1, X=2) = \mathbb{P}(Y=1 \mid X=2)\, \mathbb{P}(X=2).$$
   Le tirage de la boite étant équiprobable, on a $X \sim \mathscr{U}([\![1;3]\!])$ et donc $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{3}$. Si $(X=2)$ est réalisé, alors, on pioche une boule dans une boite qui en contient 2. Le tirage étant équiprobable, $\mathbb{P}(Y=1 \mid X=2) = \frac{1}{2}$. Ainsi,
   $$\boxed{\mathbb{P}(Y=1, X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.}$$
   Plus généralement, on obtient :

$Y\backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

De là, puisque $(X=i)_{i\in[\![0;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y=2)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(Y=2,X=i)=0+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}.$$

De plus, $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{3}$ car $X\sim\mathscr{U}([\![1;3]\!])$. Donc

$$\mathbb{P}(Y=2)\,\mathbb{P}(X=1)=\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}\neq 0=\mathbb{P}(Y=2,X=1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $X_n\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$ et $Y_n=\mathrm{e}^{-X_n}$. Déterminer pour tout $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Y_n\geqslant\varepsilon)$.

   Solution. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon>0$. On note que Y_n est une variable aléatoire positive, donc par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(Y_n\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\varepsilon}.$$

   Or par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-k}\,\mathbb{P}(X_n=k)&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-k}\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} && \text{car } X_n\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)\\ &=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{-k}\\ &=\left(\frac{1+\frac{1}{\mathrm{e}}}{2}\right)^n && \text{car on reconnaît un binôme de Newton}\\ &=\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2\,\mathrm{e}}\right)^n.\end{aligned}$$

   Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$0\leqslant\mathbb{P}(Y_n\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2\,\mathrm{e}}\right)^n.$$

   Or $\mathrm{e}+1<2\,\mathrm{e}$ donc $\frac{\mathrm{e}+1}{2\,\mathrm{e}}\in]0;1[$. Ainsi, $\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2\,\mathrm{e}}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Conclusion, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Y_n\geqslant\varepsilon)=0.}$$

5. On dispose dans une urne de $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On en pioche n simultanément qui constitue notre poignée. Pour tout $i\in[\![1;2n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu la boule i parmi notre poignée et 0 sinon. Pour $i\in[\![1;2n]\!]$, déterminer la loi de X_i puis pour tout $(i,j)\in[\![1;2n]\!]$, $i\neq j$, déterminer $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$. *On pourra faire un peu de dénombrement.*

   Solution. Soit $i\in[\![1;2n]\!]$. Puisque X_i est à valeurs dans $\{0,1\}$, nécessairement X_i suit une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre $\mathbb{P}(X_i=1)$. Dénombrement le nombre de tirages apportant le numéro i. On commence par piocher le numéro i : une seule façon puis l'on pioche $n-1$ autres numéros simultanément parmi les $2n-1$ restants : $\binom{2n-1}{n-1}$ possibilités. D'autre part, on a $\binom{2n}{n}$ façons de piocher n numéros simultanément parmi les $2n$ possibles. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_i=1)=\frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}=\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}\frac{n!n!}{(2n)!}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall i \in [\![1;2n]\!], \quad X_i \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

Cela est parfaitement logique car piocher n numéros parmi $2n$ revient à faire deux tas de même taille. Donc chaque numéro à autant de chance d'être dans le tas des « sélectionnés » que dans le tas des « délaissés ». Sa probabilité d'être dans celui des « sélectionnés » est donc bien de $1/2$.

Soit $(i,j) \in [\![1;2n]\!]$, $i \neq j$. Par définition,

$$\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \mathbb{E}\left(X_i X_j\right) - \mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_j\right).$$

Par ce qui précède, $\mathbb{E}\left(X_i\right) = \mathbb{E}\left(X_j\right) = \frac{1}{2}$. De plus, par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_i X_j\right) &= 0 \times \mathbb{P}\left(X_i = 0, X_j = 0\right) + 0 \times \mathbb{P}\left(X_i = 1, X_j = 0\right) + 0 \times \mathbb{P}\left(X_i = 0, X_j = 1\right) + 1 \times \mathbb{P}\left(X_i = 1, X_j = 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_i = 1, X_j = 1\right).\end{aligned}$$

De même que précédemment, on a

$$\mathbb{P}\left(X_i = 1, X_j = 1\right) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}\frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} = \frac{2n-2-(2n-1)}{4(2n-1)} = -\frac{1}{4(2n-1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = -\frac{1}{4(2n-1)}.}$$

En particulier, $\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) < 0$ ce qui est logique car si X_i prend la valeur 1 cela diminue la probabilité que X_j aussi (et inversement) donc ces deux variables sont liées « négativement ».