Réponses de l'interrogation 34
Révisions III

1. (a) Définir j. Que vaut j^2 ? j^3 ? $1+j+j^2$?
   Solution. On a $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. De plus,
   $$j^2 = \bar{j}, \qquad j^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad 1+j+j^2 = 0.$$
   (b) Que dire de l'image d'une famille par une application linéaire ?
   Solution. Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors
   - Si f est injective et $\mathscr{F}$ libre alors $f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.
   - Si f est surjective et $\mathscr{F}$ est génératrice dans E alors $f(\mathscr{F})$ est génératrice dans F.
   - Si f est un isomorphisme et $\mathscr{F}$ une base de E alors $f(\mathscr{F})$ est une base de F.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n} \frac{1}{\ln^2(t)}\,dt$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   On pourra comparer $\ln^2(t)$ avec t pour t assez grand.
   Solution. On observe que
   $$\frac{\ln^2(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Donc il existe $A \geqslant \frac{3}{2}$ tel que ...
   Donc par le théorème de minoration,
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$$
3. Déterminer UNE solution de l'équation $(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t\,e^t$.
   Solution. En conséquence, on pose $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et
   $$y_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t(at+b)\,e^t = \left(at^2+bt\right)e^t. \end{array}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\text{la fonction } y_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{3t^2-2t}{18}\,e^t \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$
4. Justifier que l'équation $(E) : y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$ admet des solutions sur $I =]-1;1[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   Solution. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par
   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)+C}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \middle|\ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$
5. Donner une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(u_{n+1} - 2u_n) + u_{n+1} = -2$.
   On pourra poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = nu_n$.
   Solution. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_{n+1} = 2v_n - 2.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{2-2^{n+1}}{n}.}$$