Correction de l'interrogation 03
Bijections

1. (a) Enoncer le théorème de la bijection (version 2).
Solution. Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Si
   - f est continue sur I,
   - et strictement monotone sur I,

   alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus sa réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I, continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).

   (b) Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
Solution. Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Si
   - f est dérivable sur I,
   - strictement monotone sur I,
   - et $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$,

   alors f^{-1} existe, est dérivable sur $J = f(I)$ et
$$\forall x \in J, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln\left(x^2 + 2x + 3\right) \end{cases}$. Déterminer $f([-2\,;\,2])$ et $f^{\leftarrow}([-\ln(3)\,;\,\ln(3)])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$f(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + 2x + 3 > 0.$$
Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 4 - 4 \times 3 < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 3 > 0$. Ainsi, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 3}.$$
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 3 > 0$, on en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x + 1 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant -1.$$
On en déduit donc le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

De plus $f(-1) = \ln(1 - 2 + 3) = \ln(2)$. Puis
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$
et pour tout $x < 0$,
$$f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 3\right) = \ln\left(x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)\right).$$
Donc
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$
On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(-2) = \ln(4-4+3) = \ln(3)$ et $f(2) = \ln(4+4+3) = \ln(11)$. D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(3) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(x^2+2X+3\right) = \ln(3) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+2x+3 = 3 \qquad \text{par injectivité de la fonction lograithme} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = -2. \end{aligned}$$

D'où le tableau suivant

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$\ln(3)$	$\nearrow$	$\ln(11)$	$\nearrow$	$+\infty$

On conclut que

$$f([-2;2]) = [\ln(2);\ln(11)] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}([-\ln(3);\ln(3)]) = [-2;0].$$

La fonction f n'est ni injective ($\ln(3)$ admet deux antécédents -2 et 0) ni surjective (0 n'a aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

3. Montrer que $f : x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{2x}$ définit une bijection de $[0;+\infty[$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{0\}$ et établir une expression de $\left(f^{-1}\right)'$ en fonction de f^{-1}.
Solution. La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{2x} + 2x^2\,\mathrm{e}^{2x} = 2x(1+x)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Or f est continue en 0 donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Enfin, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a donc

- f est continue sur $[0;+\infty[$,
- f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définie une bijection de } [0;+\infty[\text{ dans } J = \left[f(0); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0;+\infty[.}$$

Posons $J' = J \setminus \{0\} =]0;+\infty[$. Par ce qui précède,

- f est dérivable sur $I' =]0;+\infty[$,
- f est strictement croissante sur I',
- et $\forall x \in I'$, $f'(x) = 2x(x+1)\,\mathrm{e}^{2x} \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J' =]0;+\infty[$ et

$$\forall y \in J', \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{2f^{-1}(y)\left(f^{-1}(y)+1\right)\mathrm{e}^{2f^{-1}(y)}}.$$

Conclusion, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[}$ et

$$\boxed{\forall y \in]0;+\infty[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{2f^{-1}(y)\left(f^{-1}(y)+1\right)\mathrm{e}^{2f^{-1}(y)}}.}$$

4. Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x-5}$.
Solution. Pour tout $x > 5$, on a

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-5} = \frac{x^2}{x}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}} = x\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}}.$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Puis, de même, pour tout $x > 5$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Poursuivons, pour tout $x > 5$,

$$f(x) - x = \frac{x^2+3x+1}{x-5} - x = \frac{x^2+3x+1-x^2+5x}{x-5} = \frac{8x+1}{x-5} = \frac{8x}{x}\frac{1+\frac{1}{8x}}{1-\frac{5}{x}} = 8\frac{1+\frac{1}{8x}}{1-\frac{5}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 8.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote d'équation } y = x+8.}$$

5. Comparer au voisinage de $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}$ et $g : x \mapsto \frac{x^3+5}{2-x}$.
Solution. Pour tout $x > 2$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{e}^{3+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}}{\frac{x^3+5}{2-x}} = \frac{\mathrm{e}^3\left(\sqrt{x}+1\right)(2-x)}{x^3+5} = \frac{-x\sqrt{x}}{x^3}\frac{\mathrm{e}^3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{5}{x^3}} = \frac{-1}{x\sqrt{x}}\frac{\mathrm{e}^3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{5}{x^3}}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(g(x)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} g(x).}$$