Correction de l'interrogation 04
Trigonométrie

1. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que a, b et $a+b$ soient dans le domaine de définition de la fonction tangente. Développer $\cos(a+b)$ et $\sin(a-b)$ et $\tan(a+b)$.
Solution. On a
$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)\\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

(b) Dresser les variations de sinus, cosinus et tangente sur $[0; 2\pi]$.
Solution. Pour le cosinus, on a

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Pour le sinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Pour la tangente :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \tan(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Développer $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a-b)$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :
$$\begin{aligned}\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a+b) &= \sin(2a)\cos(b) - \sin(b)\cos(2a) + \tan(b)\cos(2a)\cos(b) + \tan(b)\sin(2a)\sin(b)\\ &= \sin(2a)\left(\cos(b) + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\sin(b)\right) + \cos(2a)\left(-\sin(b) + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\cos(b)\right)\\ &= \sin(2a)\frac{\cos^2(b)+\sin^2(b)}{\cos(b)} + \cos(2a)(-\sin(b)+\sin(b))\\ &= 2\frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)}.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a+b) = 2\frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)}.}$$
Vérification : si $a = 0$, on obtient $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a+b) = -\sin(b) + \tan(b)\cos(b) = -\sin(b) + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\cos(b) = 0$ et $2\frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)} = 0$ OK ! Si $b = 0$, $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a+b) = \sin(2a)$ et $2\frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)} = 2\sin(a)\cos(a)$. On retrouve une formule bien connue. OK !

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x)$.
   Solution. Méthode 1. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) &= 2\sin\left(\frac{x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-5x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x-7x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+7x}{2}\right)\\
&= 2\sin(3x)\cos(2x) - 2\sin(3x)\cos(4x)\\
&= 2\sin(3x)\left(\cos(2x) - \cos(4x)\right)\\
&= 2\sin(3x)\left(-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)\right)\\
&= -4\sin(3x)\sin(3x)\sin(-x)\\
&= 4\sin^2(3x)\sin(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) = 4\sin^2(3x)\sin(x).}$$

Vérification : si $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) = 1 + 1 - (-1) + 1 = 4$ *et* $4\sin^2(3x)\sin(x) = 4(-1)^2 = 4$ *OK ! Méthode 2.* On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) &= 2\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x)\\
&= 2\sin(x) + 2\sin\left(\frac{5x-7x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x+7x}{2}\right)\\
&= 2\sin(x) + 2\sin(-x)\cos(6x)\\
&= 2\sin(x)\left(1 - \cos(6x)\right)\\
&= 2\sin(x)2\sin^2(3x)\\
&= 4\sin(x)\sin^2(3x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) = 4\sin^2(3x)\sin(x).}$$

4. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $(E) : 2\cos^3(x) - 5\cos(x) = \sin^2(x) - 3$.
   Indication : commencer par exprimer $\sin^2(x)$ *en fonction de* $\cos(x)$.
   Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
(E) : \quad 2\cos^3(x) - 5\cos(x) = \sin^2(x) - 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos^3(x) - 5\cos(x) = 1 - \cos^2(x) - 3\\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^3(x) + \cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0.
\end{aligned}$$

Posons $X = \cos(x)$. Dès lors,

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2X^3 + X^2 - 5X + 2 = 0.$$

On observe que 1 est une racine « évidente ». Donc $X - 1$ divise $2X^3 + X^2 - 5X + 2$.

$$\begin{array}{rrrr|lll}
2X^3 & +X^2 & -5X & 2 & X & -1 & \\ \cline{5-7}
-(2X^3 & -2X^2) & & & 2X^2 & +3X & -2 \\ \cline{1-2}
 & 3X^2 & -5X & 2 & & & \\
 & -(3X^2 & -3X) & & & & \\ \cline{2-3}
 & & -2X & 2 & & & \\
 & & -(-2X & +2) & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

D'où, $2X^3 + X^2 - 5X + 2 = (X-1)\left(2X^2 + 3X - 2\right)$. Ainsi,

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad (X-1)\left(2X^2 + 3X - 2\right) = 0.$$

Soit Δ le discriminant de $2X^2+3X-2$. On a $\Delta = 9+16 = 25$. Donc les racines sont $\frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-3-5}{4} = -2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,(X-1)\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+2)=0\\
&\Leftrightarrow \quad X=1 \ \text{ OU } \ X=\frac{1}{2} \ \text{ OU } \ X=-2\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x)=1 \ \text{ OU } \ \cos(x)=\frac{1}{2} \ \text{ OU } \ \cos(x)=-2 \text{ impossible.}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}, \qquad x=0+2k\pi \ \text{ OU } \ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \text{ OU } \ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{2k\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

Rappelons que (E) : $2\cos^3(x)-5\cos(x)=\sin^2(x)-3$. *Donc si* $x=0$, *on a* $2-5=-3$ *OK ! Si* $x=\frac{\pi}{3}$, $2\frac{1}{8}-5\frac{1}{2}=-\frac{9}{4}$ *et* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-3=\frac{3}{4}-3=-\frac{9}{4}$ *OK ! Si* $x=-\frac{\pi}{3}$, *on a toujours* $2\frac{1}{8}-5\frac{1}{2}=-\frac{9}{4}$ *et* $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-3=-\frac{9}{4}$.

5. Déterminer l'ensemble des réels $x\in\mathbb{R}$ tels que (I) : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$ et représenter les solutions entre $[0;2\pi]$ sur le cercle trigonométrique.
Solution. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(I)\ :\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2}\leqslant\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x)+\frac{1}{2}\leqslant 1\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x)\leqslant\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}, \qquad \frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}, \qquad \frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (I) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{5\pi}{6}+k\pi\right].}$$

On obtient