

## Correction de l'interrogation 04

### Trigonométrie

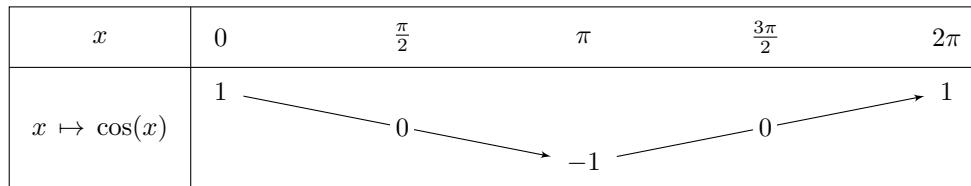
1. (a) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a, b$  et  $a+b$  soient dans le domaine de définition de la fonction tangente. Développer  $\cos(a+b)$  et  $\sin(a-b)$  et  $\tan(a+b)$ .

*Solution.* On a

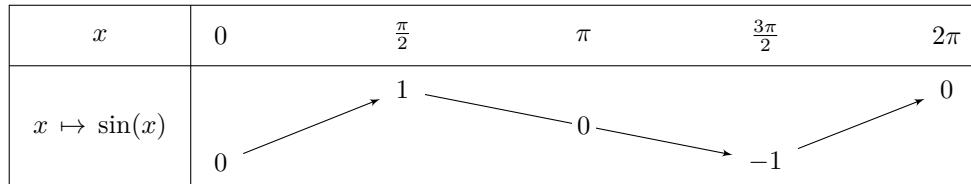
$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

- (b) Dresser les variations de sinus, cosinus et tangente sur  $[0; 2\pi]$ .

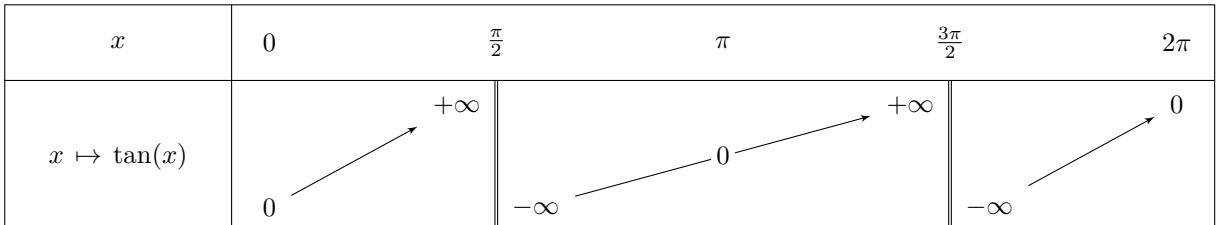
*Solution.* Pour le cosinus, on a



Pour le sinus :



Pour la tangente :



2. Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Développer  $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a-b)$ .

*Solution.* On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a-b) &= \sin(2a)\cos(b) - \sin(b)\cos(2a) + \tan(b)\cos(2a)\cos(b) + \tan(b)\sin(2a)\sin(b) \\ &= \sin(2a) \left( \cos(b) + \frac{\sin(b)}{\cos(b)} \sin(b) \right) + \cos(2a) \left( -\sin(b) + \frac{\sin(b)}{\cos(b)} \cos(b) \right) \\ &= \sin(2a) \frac{\cos^2(b) + \sin^2(b)}{\cos(b)} + \cos(2a) (-\sin(b) + \sin(b)) \\ &= 2 \frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a-b) = 2 \frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)}}.$$

Vérification : si  $a = 0$ , on obtient  $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a-b) = -\sin(b) + \tan(b)\cos(b) = -\sin(b) + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\cos(b) = 0$  et  $2 \frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)} = 0$  OK! Si  $b = 0$ ,  $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a-b) = \sin(2a)$  et  $2 \frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)} = 2\sin(a)\cos(a)$ . On retrouve une formule bien connue. OK!

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Factoriser  $\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x)$ .

*Solution.* Méthode 1. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) &= 2 \sin\left(\frac{x+5x}{2}\right) \cos\left(\frac{x-5x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x-7x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+7x}{2}\right) \\
 &= 2 \sin(3x) \cos(2x) - 2 \sin(3x) \cos(4x) \\
 &= 2 \sin(3x) (\cos(2x) - \cos(4x)) \\
 &= 2 \sin(3x) \left(-2 \sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right) \sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)\right) \\
 &= -4 \sin(3x) \sin(3x) \sin(-x) \\
 &= 4 \sin^2(3x) \sin(x).
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) = 4 \sin^2(3x) \sin(x)}.$$

Vérification : si  $x = \frac{\pi}{2}$ , on a  $\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) = 1 + 1 - (-1) + 1 = 4$  et  $4 \sin^2(3x) \sin(x) = 4(-1)^2 = 4$  OK!

Méthode 2. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) &= 2 \sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) \\
 &= 2 \sin(x) + 2 \sin\left(\frac{5x-7x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x+7x}{2}\right) \\
 &= 2 \sin(x) + 2 \sin(-x) \cos(6x) \\
 &= 2 \sin(x) (1 - \cos(6x)) \\
 &= 2 \sin(x) 2 \sin^2(3x) \\
 &= 4 \sin(x) \sin^2(3x).
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(x) + \sin(5x) - \sin(7x) + \sin(x) = 4 \sin^2(3x) \sin(x)}.$$

4. Déterminer l'ensemble des réels  $x \in \mathbb{R}$  tels que (E) :  $2 \cos^3(x) - 5 \cos(x) = \sin^2(x) - 3$ .

*Indication :* commencer par exprimer  $\sin^2(x)$  en fonction de  $\cos(x)$ .

*Solution.* Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On sait que  $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ . On obtient donc

$$\begin{aligned}
 (E) : \quad 2 \cos^3(x) - 5 \cos(x) &= \sin^2(x) - 3 &\Leftrightarrow 2 \cos^3(x) - 5 \cos(x) &= 1 - \cos^2(x) - 3 \\
 &\Leftrightarrow 2 \cos^3(x) + \cos^2(x) - 5 \cos(x) + 2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Posons  $X = \cos(x)$ . Dès lors,

$$(E) \Leftrightarrow 2X^3 + X^2 - 5X + 2 = 0.$$

On observe que 1 est une racine « évidente ». Donc  $X - 1$  divise  $2X^3 + X^2 - 5X + 2$ .

$$\begin{array}{r}
 2X^3 \quad +X^2 \quad -5X \quad 2 \\
 -(2X^3 \quad -2X^2) \\
 \hline
 3X^2 \quad -5X \quad 2 \\
 -(3X^2 \quad -3X) \\
 \hline
 -2X \quad 2 \\
 -(-2X \quad +2) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

D'où,  $2X^3 + X^2 - 5X + 2 = (X - 1)(2X^2 + 3X - 2)$ . Ainsi,

$$(E) \Leftrightarrow (X - 1)(2X^2 + 3X - 2) = 0.$$

Soit  $\Delta$  le discriminant de  $2X^2 + 3X - 2$ . On a  $\Delta = 9 + 16 = 25$ . Donc les racines sont  $\frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$  et  $\frac{-3-5}{4} = -2$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 (E) &\Leftrightarrow 2(X-1)\left(X-\frac{1}{2}\right)(X+2)=0 \\
 &\Leftrightarrow X=1 \text{ OU } X=\frac{1}{2} \text{ OU } X=-2 \\
 &\Leftrightarrow \cos(x)=1 \text{ OU } \cos(x)=\frac{1}{2} \text{ OU } \cos(x)=-2 \text{ impossible.} \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x=0+2k\pi \text{ OU } x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ OU } x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est donné par

$$\mathcal{S}_E = \left\{ 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Rappelons que  $(E)$  :  $2\cos^3(x) - 5\cos(x) = \sin^2(x) - 3$ . Donc si  $x = 0$ , on a  $2 - 5 = -3$  OK! Si  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $2\frac{1}{8} - 5\frac{1}{2} = -\frac{9}{4}$  et  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3 = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$  OK! Si  $x = -\frac{\pi}{3}$ , on a toujours  $2\frac{1}{8} - 5\frac{1}{2} = -\frac{9}{4}$  et  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3 = -\frac{9}{4}$ .

5. Déterminer l'ensemble des réels  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $(I)$  :  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$  et représenter les solutions entre  $[0; 2\pi]$  sur le cercle trigonométrique.

*Solution.* Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (I) : \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{6} + x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6} - (x - \frac{\pi}{6})\right)}{2} \leq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow \cos(2x) + \frac{1}{2} \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow \cos(2x) \leq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de  $(I)$  est donné par

$$\mathcal{S}_I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi \right].$$

On obtient

