Correction de l'interrogation 05
Nombres complexes

1. (a) Développer $\cos(a-b)$, linéariser $\cos(a)\sin(b)$ et factoriser $\sin(p)-\sin(q)$.
   Solution. Soit $(a,b,p,q)\in\mathbb{R}^4$. On a

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \cos(a)\sin(b) &= \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}\\ \sin(p)-\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}}$$

   (b) Enoncer la formule donnant le carré du module d'une somme.
   Solution. Pour tout $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$

2. Soit $z=\sqrt{3}-i$. Calculer la forme exponentielle puis algébrique de z^{2023}.
   Solution. Soit $z=\sqrt{3}+i$. On a $|z|=\sqrt{3+1}=2$. Donc

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

   Par la formule de Moivre,

$$z^{2023} = \left(2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{2023} = 2^{2023}\,\mathrm{e}^{-i\frac{2023\pi}{6}}.$$

   Or $2023 = 12\times 168+7$. Donc $\frac{2023\pi}{6} = 2\pi\times 168+\frac{7\pi}{6}$. Ainsi,

$$z^{2023} = 2^{2023}\,\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{6}} = 2^{2023}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

   Conclusion, la forme exponentielle de z^{2023} est

$$\boxed{z^{2023} = 2^{2023}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}.}$$

   Par suite,

$$z^{2023} = 2^{2023}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = -2^{2022}\sqrt{3}+2^{2022}i.$$

   Conclusion, la forme algébrique de z^{2023} est

$$\boxed{z^{2023} = -2^{2022}\sqrt{3}+2^{2022}i.}$$

3. Soit $x\in\mathbb{R}$. En passant par les complexes, linéariser $\cos(x)\sin^3(x)$.
   Solution. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin^3(x) &= \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 \qquad \text{par les formules d'Euler}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{3ix}-3\,\mathrm{e}^{2ix}\,\mathrm{e}^{-ix}+3\,\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{-2ix}-\mathrm{e}^{-3ix}}{8i^3}\\ &= \frac{1}{-16i}\left(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}\right)\left(\mathrm{e}^{3ix}-3\,\mathrm{e}^{ix}+3\,\mathrm{e}^{-ix}-\mathrm{e}^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{-16i}\left(\mathrm{e}^{4ix}-3\,\mathrm{e}^{2ix}+3-\mathrm{e}^{-2ix}+\mathrm{e}^{2ix}-3+3\,\mathrm{e}^{-2ix}-\mathrm{e}^{-4ix}\right)\\ &= \frac{1}{-16i}\left(\mathrm{e}^{4ix}-\mathrm{e}^{-4ix}-2\,\mathrm{e}^{2ix}+2\,\mathrm{e}^{-2ix}\right)\\ &= \frac{1}{-16i}\left(2i\sin(4x)-2(2i)\sin(2x)\right)\\ &= \frac{2\sin(2x)-\sin(4x)}{8}.\end{aligned}$$

Vérification : si $x = \frac{\pi}{6}$, $\cos(x)\sin^3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{16}$ *et* $\frac{2\sin(2x)-\sin(4x)}{8} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{8} = \frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{8} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{16}$ *OK !*
Conclusion,

$$\boxed{\cos(x)\sin^3(x) = \frac{2\sin(2x) - \sin(4x)}{8}.}$$

4. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-2i}{z-2} \in \mathbb{U}$.
Solution. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$. Posons $U = \frac{z-2i}{z-2}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} U \in \mathbb{U} & \Leftrightarrow & U\overline{U} \neq 1 \\ & \Leftrightarrow & \frac{z-2i}{z-2}\frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}-2} = 1 \\ & \Leftrightarrow & (z-2i)(\overline{z}+2i) = (\overline{z}-2)(z-2) \qquad \text{car } z \neq 2 \\ & \Leftrightarrow & z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 4 = z\overline{z} - 2\overline{z} - 2z + 4 \\ & \Leftrightarrow & 2i(z-\overline{z}) = -2(z+\overline{z}) \\ & \Leftrightarrow & 2i(2i)\,\mathrm{Im}(z) = -4\mathrm{Re}(z) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z). \end{array}$$

Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, on en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{x + ix \mid x \in \mathbb{R}\}.}$$

Cela correspond $\boxed{\text{à la droite d'équation } y = x}$. On note qu'il n'est pas nécessaire d'enlever le point $(2, 0)$ car celui-ci n'est pas sur la droite.
Interprétation géométrique. Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ et $M(z)$, $A(2i)$ et $B(2)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} \frac{z-2i}{z-2} \in \mathbb{U} & \Leftrightarrow & \left|\frac{z-2i}{z-2}\right| = 1 \\ & \Leftrightarrow & |z-2i| = |z-2| \\ & \Leftrightarrow & AM = BM \\ & \Leftrightarrow & M \text{ est sur la médiatrice de } (AB). \end{array}$$

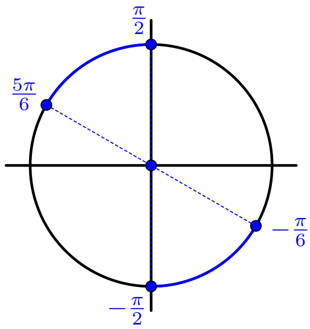
5. Linéariser $\sin^2(x)$ en déduire l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $2\sin^2(x) - \sqrt{3}\sin(2x) \geqslant 2$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. Donc

$$\begin{array}{llll} (E) : & 2\sin^2(x) - \sqrt{3}\sin(2x) \geqslant 2 & \Leftrightarrow & 1 - \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) \geqslant 2 \\ & & \Leftrightarrow & -\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) \geqslant 1 \\ & & \Leftrightarrow & \cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) \leqslant -1 \\ & & \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) \leqslant -\frac{1}{2} \\ & & \Leftrightarrow & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x) \leqslant -\frac{1}{2} \\ & & \Leftrightarrow & \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant -\frac{1}{2} \\ & & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x - \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ & & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ \pi + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ & & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k\pi. \end{array}$$

Conclusion, on l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi\right].}$$

En particulier, entre $-\pi$ et π :


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{2}$