# Correction de l'interrogation 06
# Calcul algébrique

1. (a) Donner la somme géométrique.
   *Solution.* Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$. On a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

   (b) Définir le coefficient binomial.
   *Solution.* Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P_n = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k^2-3k+1}$.
   *Solution.* Par propriété de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k^2-3k+1} \\ &= \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n} \left(k^2-3k+1\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{n+1}{6}(n(2n+1)-9n+6)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{n+1}{6}\left(2n^2+n-9n+6\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{n+1}{6}\left(2n^2-8n+6\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{n+1}{3}\left(n^2-4n+3\right)} \end{aligned}$$

   On note que 1 est une racine de $X^2-4X+3$ donc $X^2-4X+3 = (X-1)(X-3)$ Ainsi,

$$P_n = \mathrm{e}^{\frac{n+1}{3}(n-1)(n-3)}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{P_n = \mathrm{e}^{\frac{(n+1)(n-1)(n-3)}{3}}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une inversion d'indice, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$.

*Solution.* Posons $\tilde{k} = n - k$. Si $k = 0$, on a $\tilde{k} = n$ et si $k = n$, $\tilde{k} = 0$ et $k = n - \tilde{k}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \binom{n}{n-\tilde{k}} (n - \tilde{k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} (n - k) && \text{car l'indice est muet} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n - k) \\
&= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \\
&= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k
\end{aligned}$$

On reconnait dans la première somme un binôme de Newton et on reconnait $S_n$ dans la seconde :

$$S_n = n\,(1+1)^n - S_n \qquad \Leftrightarrow \qquad 2S_n = n2^n \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n = n2^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = n2^{n-1}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} (k+1)^j - k^j$.

*Solution. Méthode 1 (en sommant d'abord sur $k$).* On a une somme rectangulaire. Donc

$$S_n = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} (k+1)^j - k^j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (k+1)^j - k^j.$$

En posant $a_k = k^j$, on reconnait une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \left[(n+1)^j - 1^j\right] = \sum_{j=1}^{n} (n+1)^j - \sum_{j=1}^{n} 1.$$

On reconnait dans la première somme une somme géométrique de raison $n + 1 \neq 1$ car $n \neq 0$ :

$$S_n = (n+1)\,\frac{(n+1)^n - 1}{n+1-1} - n = (n+1)\,\frac{(n+1)^n - 1}{n} - n.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = (n+1)\,\frac{(n+1)^n - 1}{n} - n.}$$

*Méthode 2 (en sommant d'abord sur $j$).* On a une somme rectangulaire. Donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} (k+1)^j - k^j \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (k+1)^j - k^j \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} (k+1)^j - \sum_{j=1}^{n} k^j \right).
\end{aligned}$$

En interne, on reconnait deux sommes géométriques de raison $k+1$ et $k$. Attention pour que ces raisons soient différentes de 1, il faut exclure $k=1$ :

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(\sum_{j=1}^{n} 2^j - \sum_{j=1}^{n} 1^j\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(k+1)^j - \sum_{j=1}^{n} k^j\right) \\
&= 2\frac{2^n-1}{2-1} - n + \sum_{k=2}^{n}\left((k+1)\frac{(k+1)^n-1}{k+1-1} - k\frac{k^n-1}{k-1}\right) \\
&= 2^{n+1} - 2 - n + \sum_{k=2}^{n}\left((k+1)\frac{(k+1)^n-1}{k+1-1} - k\frac{k^n-1}{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Posons $a_k = k\frac{k^n-1}{k-1}$, on reconnait une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
S_n &= 2^{n+1} - (n+2) + (n+1)\frac{(n+1)^n-1}{n+1-1} - 2\frac{2^n-1}{2-1} \\
&= 2^{n+1} - (n+2) + (n+1)\frac{(n+1)^n-1}{n} - 2^{n+1} + 2 \\
&= (n+1)\frac{(n+1)^n-1}{n} - n.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = (n+1)\frac{(n+1)^n-1}{n} - n.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

*Solution.* On reconnait une somme triangulaire. On ne sait pas sommer en interne sur $j$ (essayer pour vous en rendre compte). On va sommer en interne sur $i$ :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\binom{n}{j}\binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}\binom{n}{j}\binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i} \qquad \text{car } \binom{n}{j} \text{ ne dépend pas de } i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} - \binom{j}{j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i 1^{j-i} - 1\right).
\end{aligned}$$

On reconnait un binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left((1+1)^j - 1\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left(2^j - 1\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(2^j - 1\right) - \binom{n}{0}\left(2^0 - 1\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}.
\end{aligned}$$

On reconnait deux binômes de Newton :

$$S_n = (2+1)^n - 2^n = 3^n - 2^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 3^n - 2^n.}$$