Correction de l'interrogation 07
Fonctions usuelles

1. (a) Enoncer la croissance comparée du logarithme en 0.
   Solution. Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b \left|\ln(x)\right|^a = 0.$$

   (b) Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction arcsinus.
   Solution. La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1;1[$ et
   $$\forall x \in]-1;1[, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(\mathrm{sh}(x)) + \ln(\mathrm{ch}(2x)) - \ln(\mathrm{sh}(3x) - \mathrm{sh}(x))$ puis montrer que $\forall x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = -\ln(2)$.
   Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{sh}(x) > 0 \\ \mathrm{ch}(2x) > 0 \text{ toujours vrai car } \mathrm{ch}(u) \geqslant 1 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R} \\ \mathrm{sh}(3x) - \mathrm{sh}(x) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \mathrm{sh}(3x) - \mathrm{sh}(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$
   Pour tout $x > 0$, $3x > x$. De plus la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc si $x > 0$, alors nécessairement $\mathrm{sh}(3x) > \mathrm{sh}(x)$. Ainsi,
   $$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*.}$$
   De plus, pour tout $x > 0$,
   $$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\mathrm{sh}(x)) + \ln(\mathrm{ch}(2x)) - \ln(\mathrm{sh}(3x) - \mathrm{sh}(x)) \\ &= \ln\left(\frac{\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(2x)}{\mathrm{sh}(3x) - \mathrm{sh}(x)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-3x}}{4}}{\frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\ln(2). \end{aligned}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f(x) = -\ln(2).}$$

3. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de dérivabilité de $f : x \mapsto \frac{\arccos(x^2)}{\ln(\mathrm{ch}(x))}$ puis dériver f. *On ne demande pas de simplifier le résultat obtenu.*

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f \text{ dérivable en } x \quad &\Leftarrow \quad \begin{cases} -1 < x^2 < 1 \\ \ln(\operatorname{ch}(x)) \neq 0 \\ \operatorname{ch}(x) > 0 \text{ toujours vrai} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 < 1 \\ \operatorname{ch}(x) \neq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} =]-1;0[\cup]0;1[\,.}$$

Puis, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\arccos\left(x^2\right)\right)' \ln(\operatorname{ch}(x)) - \arccos\left(x^2\right)\left(\ln(\operatorname{ch}(x))\right)'}{\ln^2(\operatorname{ch}(x))} \\ &= \frac{-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \ln(\operatorname{ch}(x)) - \arccos\left(x^2\right) \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}}{\ln^2(\operatorname{ch}(x))} \\ &= -\frac{2x \ln(\operatorname{ch}(x)) \operatorname{ch}(x) + \arccos\left(x^2\right) \operatorname{sh}(x)\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}\operatorname{ch}(x)\ln^2(\operatorname{ch}(x))}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}, \qquad f'(x) = -\frac{2x \ln(\operatorname{ch}(x)) \operatorname{ch}(x) + \arccos\left(x^2\right) \operatorname{sh}(x)\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}\operatorname{ch}(x)\ln^2(\operatorname{ch}(x))}.}$$

4. Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}}$.

Solution. Pour tout $x > 0$, $\operatorname{ch}(x) > 0$, donc $(\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}}$ existe et

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(\operatorname{ch}(x))} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left[\ln(\mathrm{e}^x) + \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)\right]} \\ &= \mathrm{e}^{1+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)} \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc par continuité de la fonction ln en 1/2,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) = -\ln(2).$$

Par quotient,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) = 0.$$

D'où

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) = 1.$$

Par continuité de la fonction exponentielle en 1,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\,.}$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(3x) - \arctan(x) = \frac{\pi}{6}$.
Solution. Procédons par analyse-synthèse. *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\arctan(3x) - \arctan(x) = \frac{\pi}{6}$, puisque $\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan(\arctan(3x) - \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Or, par définition de la fonction arctan, $\arctan(3x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc par la formule $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-+\tan(a)\tan(b)}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(\arctan(3x)) - \tan(\arctan(x))}{1+\tan(\arctan(3x))\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad &\Rightarrow \quad \frac{3x-x}{1+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\Rightarrow \quad 2\sqrt{3}x = 1+3x^2 \\
&\Rightarrow \quad 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad \left(\sqrt{3}x - 1\right)^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

On a donc potentiellement une unique solution $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Synthèse. Si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Alors,

$$\arctan(3x) - \arctan(x) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est bien une solution. Conclusion, l'équation admet une unique solution,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.}$$