Correction de l'interrogation 09
Calcul d'intégrales

1. (a) Enoncer la croissance de l'intégrale.

Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$, et $(f,g) \in \mathscr{C}\left([a;b], \mathbb{R}\right)^2$ telles que

$$\forall t \in [a;b], \qquad f(t) \leqslant g(t).$$

Alors,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Enoncer le théorème d'intégration par parties.

Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) Linéariser $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$.

Solution. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}\\
\sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}\\
\cos(a)\sin(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(b-a)}{2}
\end{aligned}$$

2. (a) Sans justification, ni d'étude de domaine de définition, donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x^2)}}$.

Solution. On a

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}\arcsin\left(2\ln(x)\right) + K \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(b) Sans justification, ni d'étude de domaine de dérivabilité, calculer la dérivée de $g : x \mapsto \frac{\ln(\sin(x))}{x\tan(x)}$.

Solution. On a pour tout x dans le domaine de dérivabilité de f :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\ln\left(\sin(x)\right)\right)' x\tan(x) - \ln\left(\sin(x)\right)\left(x\tan(x)\right)'}{x^2\tan^2(x)}\\
&= \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}x\tan(x) - \ln\left(\sin(x)\right)\tan(x) - \ln\left(\sin(x)\right)\frac{x}{\cos^2(x)}}{x^2\tan^2(x)}\\
&= \frac{x - \ln\left(\sin(x)\right)\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \ln\left(\sin(x)\right)\frac{x}{\cos^2(x)}}{x^2\tan^2(x)}\\
&= \frac{x\cos^2(x) - \ln\left(\sin(x)\right)\sin(x)\cos(x) - x\ln\left(\sin(x)\right)}{x^2\sin^2(x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f' : \qquad x \mapsto \frac{x\cos^2(x) - \ln\left(\sin(x)\right)\sin(x)\cos(x) - x\ln\left(\sin(x)\right)}{x^2\sin^2(x)}.}$$

3. Justifier que $f : x \mapsto x^3\,\mathrm{e}^{x^2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide d'une intégration par parties.

Solution. Par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives, dont l'une est donnée d'après le théorème fondamental de l'analyse par

$$F : \quad x \mapsto \int_0^x t^3\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{t^2} \\ v(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} u'(t) = 2t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ v'(t) = t \end{cases}.$$

Dès lors, par intégration par parties, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^x t^3\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{t^2}\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} - 0 - \left[\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2}\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} - \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{x^2-1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{x^2-1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + K \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Vérification : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{2x}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + \frac{x^2-1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = \left(x + x^3 - x\right)\mathrm{e}^{x^2} = x^3\,\mathrm{e}^{x^2}$. OK !

4. Justifier que $I = \displaystyle\int_0^{\mathrm{sh}(1)} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $t = \mathrm{sh}(x)$.

Solution. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 \geqslant 1 > 0$. Donc $\sqrt{1+t^2}$ existe et $\sqrt{1+t^2} \geqslant 1$ donc $\sqrt{1+t^2} \neq 0$. Donc $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; \mathrm{sh}(1)]$. Ainsi,

$$\boxed{I \text{ existe.}}$$

Posons $t = \mathrm{sh}(x)$. Si $t = 0$, alors $x = 0$ et si $t = \mathrm{sh}(1)$, alors $x = 1$. De plus sh est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 1]$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\mathrm{sh}(1)} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{1+\mathrm{sh}(x)^2}}\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{car } \mathrm{ch}(x) > 0 \\ &= \int_0^1 \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [\mathrm{ch}(x)]_{x=0}^{x=1} \\ &= \mathrm{ch}(1) - 1 \\ &= \frac{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}}{2} - 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^2 + 1 - 2\,\mathrm{e}}{2\,\mathrm{e}} \\ &= \frac{(\mathrm{e}-1)^2}{2\,\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \mathrm{ch}(1) - 1 = \frac{(\mathrm{e}-1)^2}{2\,\mathrm{e}}.}$$

5. Soit $A(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x - 7\right) + o\left(\mathrm{ch}\left(x^2\right) + 3x^5\right)$. Simplifier $A(x)$.

Solution. On sait que $7 \underset{x\to+\infty}{\ll} \mathrm{e}^x$. Donc

$$o\left(\mathrm{e}^x - 7\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right).$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\left(x^2\right) + 3x^5 = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + 3x^5$ et

$$\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \underset{x\to+\infty}{\ll} 3x^5 \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}.$$

Donc

$$o\left(\mathrm{ch}\left(x^2\right) + 3x^5\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right).$$

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2}} = \mathrm{e}^{x - x^2} = \mathrm{e}^{-x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

Comme $-x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, on en déduit par composition que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0.$$

Donc $\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\ll} \mathrm{e}^{x^2}$. Ainsi

$$A(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^x\right) + o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{A(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{x^2}\right).}$$