Interrogation 14 d'entrainement
Analyse Asymptotique

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
   1.2 Enoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
   1.3 Donner une condition nécessaire à l'existence d'un développement limité à l'ordre n. Préciser le cas $n = 0$ et $n = 1$.
   1.4 Enoncer l'unicité du développement limité.
   1.5 Enoncer la propriété permettant de primitiver un développement limité.
   1.6 Enoncer la formule de Taylor-Young.
   1.7 Réciter la biographie de Hardy.

   Révisions

   1.8 Définir une fonction $\mathscr{C}^1$.
   1.9 Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   1.10 Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
   1.11 Enoncer la croissance de l'intégrale.
   1.12 Enoncer la séparation de l'intégrale.
2. **Calculer un développement limité.**
   2.1 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x}}$.
   2.2 Calculer un développement à l'ordre 6 en 0 de $f : x \mapsto (\mathrm{ch}(x) - \cos(x))\,(\mathrm{sh}(x) - \sin(x))$.
   2.3 Calculer un développement à l'ordre 4 en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2+x}$.
   2.4 Calculer un développement à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$.
   2.5 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{(1+x)^2}$.
3. **Manipuler un développement usuel.**
   3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 5 de $f : x \mapsto e^{2x}$.
   3.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre $2n + 1$ en 0 de $f : x \mapsto \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}$. *Indication (i).*
   3.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre $2n + 1$ en $+\infty$ de $f : x \mapsto \arctan(x)$. *Indication (ii).*
   3.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre $3n$ en 0 de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\left(x^{3/2}\right)}{\sqrt{x}}$.
   3.5 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de $f : x \mapsto \ln(1 + 3x) - 3x$.
4. **Primitivation, dérivation, Taylor.**
   4.1 Par primitivation, déterminer le développement limité de la fonction arcsin en 0 à l'ordre 5.
   4.2 Par dérivation, retrouver le développement limité de $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ en 0 à l'ordre n.
   4.3 A l'aide de la formule de Taylor, déterminer le développement limité de ch en 1 à l'ordre $2n$.
   4.4 Par primitivation, déterminer le développement limité de $f : t \mapsto (1 + t)\ln(1 + t) - t$ en 0 à l'ordre 6.
   4.5 Donner le développement limité en 0 à l'ordre 9 de $f : x \mapsto x^2 \arctan(x)$. En déduire celui de $g : x \mapsto 2x \arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 8.

5. **Application de développement limité.**

   5.1 Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(x) + \sin(x) - 2x}{x\left(\operatorname{ch}(x) + \cos(x) - 2\right)}$.

   5.2 Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de a pour laquelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{n^2+1} - \sqrt{n+a}\right)$ converge et préciser alors sa limite.

   5.3 Préciser le comportement asymptotique en 0 de $f : x \mapsto \left(1 - x + x^2\right)^{1/x}$.

   5.4 Préciser le comportement de $f : x \mapsto \frac{x^{1+\frac{1}{x}} - 1}{x-1}$ au voisinage de 1.

   5.5 Soit f la fonction $x \mapsto \frac{x^5 - \operatorname{sh}\left(x^3\right)}{x^4 + \cos\left(x^7\right)}$. Déterminer $f^{(15)}(0)$.

   On pourra admettre que la fonction f est $\mathscr{C}^{15}$ au voisinage de 0.

Indications.

(i) Utiliser la formule $\sin(x)\cos(x) = \cdots$ pour n'avoir qu'une seule fonction trigonométrique.
Attention à l'ordre exigé qui n'est pas $2n$...

(ii) Utiliser la formule $\arctan(x) + \arctan(\cdots) = \cdots$ pour se ramener à une variable $t = \frac{1}{x} \to 0$.