

Interrogation 15 d'entraînement

Ensembles et Applications

1. Restituer le cours.

- 1.1 Énoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
- 1.2 Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
- 1.3 Définir l'injectivité et la surjectivité.
- 1.4 Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse (Prop II.16).
- 1.5 Qu'est-ce qu'un professeur de mathématiques ?

Révisions

- 1.6 Énoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions d'une équation homogène d'ordre 1.
- 1.7 Énoncer la proposition qui affirme que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.
- 1.8 Énoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
- 1.9 Énoncer le principe de superposition.
- 1.10 Définir un problème de Cauchy.

2. Donner un ensemble image ou réciproque. Sans justification ou démonstration, donner dans chaque exemple l'ensemble image ou réciproque demandé.

2.1 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix}, f([-3; 4]) ?$

2.2 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix}, f^{-1}([-3; 4]) ?$

2.3 Pour $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \text{Tr}(M) \end{matrix}, f(\mathcal{A}_2(\mathbb{R})) ?$

2.4 Pour $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \text{Tr}(M) \end{matrix}, f^{-1}(\{1\}) ?$

2.5 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & z + \bar{z} \end{matrix}, f(\mathbb{U}) ?$

2.6 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & z + \bar{z} \end{matrix}, f^{-1}([-4; +\infty]) ?$

2.7 Pour $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T + M \end{matrix}, f(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) ?$

2.8 Pour $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T + M \end{matrix}, f^{-1}(\{0_n\}) ?$

2.9 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{matrix}, f([\frac{\pi}{2}; 4\pi]) ?$

2.10 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{matrix}, f^{-1}([0; \frac{1}{2}]) ?$

2.11 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{matrix},$
 $f([-3; 2] \times [-2; 3]) ?$

2.12 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{matrix}, f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\}) ?$

2.13 Pour $f : \begin{matrix} \text{Vect}(\cos, \sin) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{matrix},$
 $f(\text{Vect}(\cos, \sin)) ?$

2.14 Pour $f : \begin{matrix} \text{Vect}(\cos, \sin) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(0) \end{matrix},$
 $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\}) ?$

2.15 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 \end{matrix}, f(\mathbb{R}) ?$

2.16 Pour $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^5 \end{matrix}, f^{-1}(\{e^{i\frac{2\pi}{3}}\}) ?$

2.17 Pour $E = \{1, 2, 3\}, f : \begin{matrix} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & A \cap \{1\} \end{matrix},$
 $f(\mathcal{P}(E)) ?$

2.18 Pour $E = \{1, 2, 3\}, f : \begin{matrix} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & A \cap \{1\} \end{matrix},$
 $f^{-1}(\{\{1\}\}) ?$

3. Manipuler les ensembles.

- 3.1 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $(A, B) \in \mathcal{P}(F)^2$. Montrer que $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
- 3.2 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
- 3.3 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $(A, B) \in \mathcal{P}(F)^2$. Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- 3.4 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- 3.5 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $(A, B) \in \mathcal{P}(F)^2$. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- 3.6 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- 3.7 Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.

4. Manipuler les injections - surjections.

- 4.1 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que $g \circ f$ est surjective implique que g est surjective.
- 4.2 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathcal{F}(F, G)$ injective. Montrer que pour tout $(g, h) \in \mathcal{F}(E, F)$, on a $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$.
- 4.3 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ injective. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- 4.4 Soient E, F deux ensembles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ surjective. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$, $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.
- 4.5 Soient E, F et G trois ensembles $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si g est injective alors f est surjective.

5. Faire de la composition de développement limité.

- 5.1 Calculer un développement à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.
- 5.2 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \ln(\arctan(x))$.
- 5.3 Calculer un développement à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{sh}(x))$.
- 5.4 Calculer un développement à l'ordre 3 en 1 de $f : x \mapsto \frac{x-1}{2+\ln(x)}$.
- 5.5 Calculer un développement à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$.