

Correction de l'interrogation 16 d'entraînement Continuité et dérivabilité

1. Restituer le cours.

1.1 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a , f, g et h trois éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que

- pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
- il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$.

Alors on a également $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

1.2 Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors les deux points suivants sont équivalents :

- i. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$
- ii. pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a , on a $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l .

1.3 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $I = [a; b]$. Alors

- f est bornée sur $[a; b]$,
- et atteint ses bornes : il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $f(\alpha) = m = \inf_{x \in I} f(x)$ et $f(\beta) = M = \sup_{x \in I} f(x)$.
- Autrement dit $f(I) = [m; M]$.

1.4 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

1.5 Posons $LO = \text{lipschitzienne}$. Alors on obtient, à l'endroit puis à l'envers :

$$LOOL$$

2. (a) Définitions sur exemples.

2.1 $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [0; \eta], \quad \left| \sqrt{x} - \sqrt{0} \right| \leq \varepsilon$$

2.2 sh est dérivable en 3 et sa dérivée vaut $\text{ch}(3)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [3 - \eta; 3 + \eta] \setminus \{3\}, \quad \left| \frac{\text{sh}(x) - \text{sh}(3)}{x - 3} - \text{ch}(3) \right| \leq \varepsilon$$

2.3 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta; \eta] \setminus \{0\}, \quad \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

2.4 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 5 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [5; 5 + \eta], \quad |\lfloor x \rfloor - \lfloor 5 \rfloor| \leq \varepsilon.$$

2.5 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x^n \ll_{x \rightarrow +\infty} e^x$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [A; +\infty[, \left| \frac{x^n}{e^x} \right| \leq \varepsilon.$$

2.6 $x \mapsto \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in [A; +\infty[, |\cos(x) - l| > \varepsilon.$$

2.7 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta; 0[, \frac{1}{x} \leq M.$$

2.8 f est bornée au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [A; +\infty[, |f(x)| \leq M.$$

Attention à bien mettre le M avant les x .

2.9 f est positive au voisinage de 0 si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta; \eta], f(x) \geq 0.$$

2.10 $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche en 0 et cette dérivée vaut -1 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta; 0[, \left| \frac{|x| - |0|}{x - 0} + 1 \right| \leq \varepsilon.$$

(b) Théorèmes sur exemples.

2.1 $x \mapsto x \sin(x)$ n'admet aucune limite en $+\infty$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Notons-la l . Alors par **la caractérisation séquentielle** de la limite, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = l.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Donc

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = +\infty.$$

Impossible. Donc $x \mapsto x \sin(x)$ n'admet aucune limite en $+\infty$.

2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [0; 1]$ tel que $\ln(1 + x^n) = -x + 1$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \ln(1 + x^n) + x - 1$. La fonction f est définie et continue sur $[0; 1]$. De plus $f(0) = \ln(1) - 1 = -1 < 0$ et $f(1) = \ln(2) > 0$. Donc **par le théorème des valeurs intermédiaires**, il existe (au moins) un réel $x \in [0; 1]$ (et même dans $]0; 1[$).

2.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x + 3)^n - x^n = 3n\alpha^{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f : x \mapsto x^n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction f est continue sur $[x; x + 3]$ et dérivable sur $]x; x + 3[$. Donc **par l'identité des accroissements finis**,

$$\exists \alpha \text{ (qui dépend de } x) \in]x; x + 3[\subseteq \mathbb{R}, \quad f(x + 3) - f(x) = f'(\alpha)(x + 3 - x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x + 3)^n - x^n = 3n\alpha^{n-1}.$$

2.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est continue sur $]x; x+1[\subseteq \mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur $]x; x+1[$. Donc par le **théorème des accroissements finis**,

$$\exists t \in]x; x+1[, \quad |\ln(x+1) - \ln(x)| \leq |\ln'(t)| |x+1 - x| = \left| \frac{1}{t} \right|.$$

Pour tout $t \in]x; x+1[$, on a

$$0 < \frac{1}{x+1} \leq \ln'(t) = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$$

Donc

$$\ln(x+1) - \ln(x) = |\ln(x+1) - \ln(x)| \leq \left| \frac{1}{t} \right| = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}.$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

2.5 La fonction $x \mapsto \frac{x^3 e^{\sin(100x)}}{x+3}$ est bornée sur $[0; 1]$.

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 e^{\sin(100x)}}{x+3}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, notamment f est continue sur le segment $[0; 1] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Donc **par le théorème des bornes atteintes** f est bornée (et atteint ses bornes) sur $[0; 1]$.

2.6 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x.$$

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} -x = 0$. Donc **par le théorème d'encadrement**, on en déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

2.7 Pour tout $y \in]-1; 0[$, il existe $x \in]-1; 1[$ tel que $\arcsin(y+1) = \arcsin(y) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit $y \in]-1; 0[\subseteq [-1; 1]$. Alors $y+1 \in]0; 1[\subseteq [-1; 1]$ et donc $[y; y+1] \subseteq [-1; 1]$. La fonction $\arcsin$ est donc continue sur $[y; y+1]$, dérivable sur $]y; y+1[$. **Par l'identité des accroissements finis**, on en déduit qu'il existe $x \in]y; y+1[\subseteq]-1; 1[$ tel que

$$\arcsin(y+1) - \arcsin(y) = \arcsin'(x)(y+1-y) \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin(y+1) = \arcsin(y) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, il existe un unique $x \in [1; +\infty[$ tel que $x^n = x+1$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^n - x - 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1} - 1$. Donc pour tout $x > 1$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $I = [1; +\infty[$. De plus f est continue sur I . Donc **par le théorème de la bijection**, on a $J = f(I) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-1; +\infty[$ et puisque $0 \in J$, on en déduit qu'il existe un unique $x \in I = [1; +\infty[$ tel que $f(x) = 0$ i.e. tel que $x^n = x+1$.

2.9 La fonction $x \mapsto \text{ch}\left(\frac{\cos(x)}{\ln(x)}\right)$ admet un maximum sur $[2; 3]$.

Soit $f : x \mapsto \text{ch}\left(\frac{\cos(x)}{\ln(x)}\right)$. La fonction f est définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$, notamment sur le segment $[2; 3]$. La fonction f est continue sur son domaine de définition en tant que composée de fonctions qui le sont. Donc f est continue sur le segment $[2; 3]$. Donc **par le théorème des bornes atteintes**, f est bornée sur $[2; 3]$ et atteint ses bornes et donc elle admet notamment un maximum sur $[2; 3]$.

$$2.10 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0.$$

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$

Donc, pour tout $x > 0$

$$\forall x > 0, \quad 1 - x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall x < 0, \quad 1 - x \geq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$0 \leq \left| x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - 1 \right| \leq |x|$$

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} |x| = 0$. Donc **par le théorème d'encadrement** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left| x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - 1 \right| = 0$ i.e.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1.$$

3. Montrer qu'une fonction est lipschitzienne.

3.1 La fonction arccos est dérivable sur $I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ et pour tout $x \in I$,

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or pour tout $x \in I$, $0 \leq x^2 \leq \frac{1}{4}$ donc $\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$\frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \leq \arccos'(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |\arccos'(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Soit $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. La fonction arccos est continue sur $[x; y]$ ou $[y; x]$ et dérivable sur $]x; y[$ ou $]y; x[$.
Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in]x; y[\text{ (ou }]y; x[), \quad |\arccos(x) - \arccos(y)| = |\arccos'(t)| |x - y|.$$

Puisque $t \in]x; y[\subseteq I$, on a $|\arccos'(t)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc

$$|\arccos(x) - \arccos(y)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} |x - y|,$$

encore reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction arccos est } \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{-lipschitzienne sur } I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].}$$

3.2 La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geq 1$ donc

$$0 \leq \arctan'(x) \leq 1.$$

Soit $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. La fonction arctan est continue sur $[x; y]$ ou $[y; x]$ et dérivable sur $]x; y[$ ou $]y; x[$.
Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in]x; y[\text{ (ou }]y; x[), \quad |\arctan(x) - \arctan(y)| = |\arctan'(t)| |x - y| \leq |x - y|,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction arctan est 1-lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$$

3.3 La fonction f est définie et même dérivable sur $[1; +\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Or pour tout $x \geq 1$, $0 < \frac{1}{x^2} \leq 1$ et $0 < e^{-\frac{1}{x}} \leq 1$ donc

$$\forall x > 1, \quad 0 \leq f'(x) \leq 1.$$

Soit $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. La fonction f est continue sur $[x; y]$ ou $[y; x]$ et dérivable sur $]x; y[$ ou $]y; x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in]x; y[\text{ (ou }]y; x[), \quad |f(x) - f(y)| = |f'(t)| |x - y| \leq |x - y|,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

La fonction f est 1-lipschitzienne sur $[1; +\infty[$.

3.4 La fonction $\tan$ est définie et même dérivable sur $I = \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ et pour tout $x \in I$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Or par croissance de la fonction tangente sur I , pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} -1 = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \leq \tan(x) \leq \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1 &\Rightarrow 0 \leq \tan^2(x) \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \leq 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in I, \quad |\tan'(x)| \leq 2.$$

Soit $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. La fonction $\tan$ est continue sur $[x; y]$ ou $[y; x]$ et dérivable sur $]x; y[$ ou $]y; x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in]x; y[\text{ (ou }]y; x[), \quad |\tan(x) - \tan(y)| = |\tan'(t)| |x - y| \leq 2 |x - y|,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

La fonction $\tan$ est 2-lipschitzienne sur $I = \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

3.5 La fonction $f : x \mapsto \ln(5x + 2)$ est définie et même dérivable sur $]-\frac{2}{5}; +\infty[$ donc notamment sur $[0; 1]$. De plus,

$$\forall x \in [0; 1], \quad f'(x) = \frac{5}{5x + 2}.$$

Or pour tout $x \in [0; 1]$, $2 \leq 5x + 2 \leq 7$ donc $\frac{5}{7} \leq \frac{5}{5x + 2} \leq \frac{5}{2}$. Ainsi,

$$\forall x \in [0; 1], \quad |f'(x)| \leq \frac{5}{2}.$$

Soit $(x, y) \in [0; 1]^2$, $x \neq y$. La fonction f est continue sur $[x; y]$ ou $[y; x]$ et dérivable sur $]x; y[$ ou $]y; x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists t \in]x; y[\text{ (ou }]y; x[), \quad |f(x) - f(y)| = |f'(t)| |x - y| \leq \frac{5}{2} |x - y|,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

La fonction f est $\frac{5}{2}$ -lipschitzienne sur $[0; 1]$.

4. Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$.

4.1 On observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^{3/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (-x)^{3/2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0) = 0.$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 0.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Donc, par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on en déduit que

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

4.2 On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^4} = +\infty$. Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = e^{-\infty} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{4}{x^5} e^{-\frac{1}{x^4}}.$$

Posons $u = \frac{1}{x^4}$. Par croissance comparée, on a $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-u} = 0$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{4}{x^5} e^{-\frac{1}{x^4}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} 4x^3 \times \frac{1}{x^8} e^{-\frac{1}{x^4}} = 0 \times 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0.$$

Donc

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on en déduit que

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

4.3 On sait que $\text{sh}(x) \sim x$ quand $x \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{\text{ch}(x)x - \text{sh}(x)}{x^2}.$$

Donc

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{(1 + o(x))x - x + o(x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + o(x^2) - x + o(x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1).$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on en déduit que

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

4.4 On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = e^{-\infty} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. Par croissance comparée, on a $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-u} = 0$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-u} = 0.$$

Et de même,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} -u^2 e^u = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0.$$

Donc

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on en déduit que

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

4.5 On a $\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{3/2}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

D'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{\text{sh}(x)\sqrt{x} - \frac{\text{ch}(x)-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x \text{sh}(x) - (\text{ch}(x) - 1)}{2x^{3/2}}.$$

Donc

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2x^2 + o(x^2) - \frac{x^2}{2}}{2x^{3/2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{3x^2}{2} + o(x^2)}{2x^{3/2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3\sqrt{x}}{4}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{3\sqrt{x}}{4} = 0.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on en déduit que

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

5. Compositions de développements limités.

5.1 On a

$$\cos(2x) + \sin(3x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2) + 3x + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x - 2x^2 + o(x^2).$$

De plus $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$. Posons $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3x - 2x^2 + o(x^2)$. Alors

- $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.
- $u^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (3x - 2x^2 + o(x^2))(3x - 2x^2 + o(x^2)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 9x^2 + o(x^2)$.
- $o(u^2(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.

Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{\cos(2x) + \sin(3x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + u(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - (3x - 2x^2 + o(x^2)) + 9x^2 + o(x^2) + o(x^2).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 3x + 11x^2 + o(x^2)}.$$

5.2 On a

$$3 + e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 3 + 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 4 \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right).$$

De plus, $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$. Posons $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. Alors

- $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.
- $u^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \left(-\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{16} + o(x^2)$.
- $o(u^2(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.

Ainsi,

$$f(x) = \frac{x}{3 + e^{-x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{4} \frac{1}{1 + u(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{4} \left[1 - \left(-\frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) + \frac{x^2}{16} + o(x^2) + o(x^2) \right].$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{64} + o(x^3)}.$$

5.3 Posons $h = x - 1$. On sait (rappel : les formules des fonctions hyperboliques s'obtiennent à partir des formules trigonométriques en remplaçant $\cos$ par ch et $\sin$ par sh) que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\text{sh}(1+h) = \text{sh}(1)\text{ch}(h) + \text{ch}(1)\text{sh}(h).$$

Donc

$$\text{sh}(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \text{sh}(1) \left(1 + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) + \text{ch}(1) (h + o(h^2)) \underset{h \rightarrow 0}{=} \text{sh}(1) + \text{ch}(1)h + \frac{\text{sh}(1)}{2}h^2 + o(h^2).$$

Par suite,

$$f(1+h) = e^{\text{sh}(1+h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\text{sh}(1) + \text{ch}(1)h + \frac{\text{sh}(1)}{2}h^2 + o(h^2)} \underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\text{sh}(1)} e^{\text{ch}(1)h + \frac{\text{sh}(1)}{2}h^2 + o(h^2)}.$$

De plus, $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Posons $u(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \text{ch}(1)h + \frac{\text{sh}(1)}{2}h^2 + o(h^2)$. Alors

- $u(h) \underset{h \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.
- $u^2(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\text{ch}(1)h + \frac{\text{sh}(1)}{2}h^2 + o(h^2) \right) \left(\text{ch}(1)h + \frac{\text{sh}(1)}{2}h^2 + o(h^2) \right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \text{ch}^2(1)h^2 + o(h^2)$. Donc

$$\frac{u^2(h)}{2} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\text{ch}^2(1)}{2}h^2 + o(h^2).$$

- $o(u^2(h)) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h^2)$.

Par conséquent,

$$f(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\text{sh}(1)} e^{u(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\text{sh}(1)} \left[1 + \text{ch}(1)h + \frac{\text{sh}(1)}{2}h^2 + o(h^2) + \frac{\text{ch}^2(1)}{2}h^2 + o(h^2) + o(h^2) \right].$$

Ainsi,

$$f(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} e^{\text{sh}(1)} + e^{\text{sh}(1)} \text{ch}(1)h + e^{\text{sh}(1)} \frac{\text{sh}(1) + \text{ch}^2(1)}{2}h^2 + o(h^2).$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} e^{\text{sh}(1)} + e^{\text{sh}(1)} \text{ch}(1)(x-1) + e^{\text{sh}(1)} \frac{\text{sh}(1) + \text{ch}^2(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

5.4 Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty[$, on a $f(x) = e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}}$. Donc au voisinage de 0, on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + o(x^4)}{x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{2-2x + \frac{8x^2}{3} - 4x^3 + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^2 e^{-2x + \frac{8x^2}{3} - 4x^3 + o(x^3)}$$

Or $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Posons $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -2x + \frac{8x^2}{3} - 4x^3 + o(x^3)$. Alors,

- $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-2x + \frac{8x^2}{3} - 4x^3 + o(x^3) \right) \left(-2x + \frac{8x^2}{3} - 4x^3 + o(x^3) \right) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} 4x^2 - \frac{16x^3}{3} + o(x^3) - \frac{16x^3}{3} + o(x^3) + o(x^3) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} 4x^2 - \frac{32x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

- Puisque $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x$, alors $u(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -8x^3$ et donc $u(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} -8x^3 + o(x^3)$.
- Enfin, $o(u(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(-8x^3 + o(x^3)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$.

D'où,

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e^2 \left(1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{6} + o(u(x)^3) \right) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} e^2 \left(1 - 2x + \frac{8x^2}{3} - 4x^3 + o(x^3) + \frac{1}{2} \left[4x^2 - \frac{32x^3}{3} + o(x^3) \right] + \frac{1}{6} \left[-8x^3 + o(x^3) \right] + o(u(x)^3) \right) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} e^2 - 2e^2x + \frac{14e^2}{3}x^2 - \frac{32e^2}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e^2 - 2e^2x + \frac{14e^2}{3}x^2 - \frac{32e^2}{3}x^3 + o(x^3).$$

5.5 On observe qu'au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 1 + \frac{x}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}x^3 + o(x^3) \\ + 1 - \frac{x}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2 - \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}x^3 + o(x^3) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} 3 - \frac{x^2}{4} + o(x^3) \end{aligned}$$

Par suite,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)}.$$

On a $\frac{1}{1-u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$. Posons $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{12} + o(x^3)$. Alors,

- $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$.
- De plus

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\frac{x^2}{12} + o(x^3) \right) \left(\frac{x^2}{12} + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3). \end{aligned}$$

- Et $o(u(x)^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(o(x^3)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$.

Dès lors,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3).$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3).$$