Correction de l'interrogation 17 d'entrainement
Suites numériques

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
- $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Deux suites adjacentes convergent et vers la même limite.

1.2 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite réelle $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \qquad |u_n - l| \leqslant \varepsilon\,.$$

1.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f est croissante et que $u_1 \geqslant u_0$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On le démontre par récurrence bien sûr !

1.4 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit Δ le discriminant de $(E_c) : r^2 - ar - b$.

- Si $\Delta > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les deux racines de (E_c),
$$\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda\, r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 l'unique racine de (E_c),
$$\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\lambda + \mu n)\, r_0^n.$$
- Si $\Delta < 0$, alors en notant $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ et $r_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\,\theta}$ les deux racines complexes de (E_c),
$$\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = r^n\left(\lambda \cos(n\,\theta) + \mu \sin(n\,\theta)\right).$$

1.5 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Si φ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ alors la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou encore une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ également et vers la même limite.

1.6 *« Sous-suite, sous-suite, sous-suite ! »*

2. **Savoir passer à la limite.**

2.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 1$.
Explication : Notons ℓ sa limite. Par continuité de la fonction $x \mapsto |x - 2|$ sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to+\infty} |u_n - 2| = |\ell - 2|$. Donc par passage à la limite dans l'inégalité, on a

$$|\ell - 2| \leqslant \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad -\ell \leqslant \ell - 2 \leqslant \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad -2\ell \leqslant -2 \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\ell \geqslant 1}.$$

2.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Explication : Notons ℓ sa limite. Par continuité de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, on a $\frac{1}{\sqrt{u_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\ell}}$ (ou $+\infty$ si $\ell = 0$). Donc par passage à la limite,

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \ell^{3/2} = 1 \\ \ell > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\ell = 1}.$$

2.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi - \arcsin(\ell)$.
Explication : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \pi - \arcsin(v_n).$$

Puis par continuité de arcsin et la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \pi - \arcsin(\ell).}$$

2.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant -1$.
Explication : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 = -1$. Donc par passage à la limite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant -1}$.

2.5 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 1.
Explication : Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles sont donc monotones de monotonie opposée. Or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$. De plus on sait que ces suites convergent vers des limites communes. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

2.6 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Explication : Notons ℓ sa limite. Puisque $(u_{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elles convergent toutes vers ℓ. Par passage à la limite, on a

$$\ell = \ell + \ell + \ell + 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 3\ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\ell = 0}.$$

2.7 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.
Explication : Notons ℓ sa limite. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1$, on a par passage à la limite,

$$\ell = -\frac{1}{2+\ell} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \ell^2 + 2\ell = -1 \\ \ell \neq -2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \ell^2 + 2\ell + 1 = 0 \\ \ell \neq -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (\ell+1)^2 = 0 \\ \ell \neq -2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\ell = -1}.$$

2.8 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 1.
Explication : On a $u_1 = \lfloor u_0 \rfloor \in \mathbb{Z}$. Donc $\lfloor u_1 \rfloor = u_1$ i.e. $u_2 = \lfloor u_0 \rfloor$. Puis par récurrence, on montre que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \lfloor u_0 \rfloor}$.

2.9 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
Explication : Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$. Par passage à la limite, on a

$$\begin{cases} \ell = \ell + \ell' \\ \ell' = 5\ell - 3\ell' \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \ell' = 0 \\ 5\ell = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\ell = \ell' = 0}.$$

2.10 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [-5 ; 5]$.
Explication : Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. La suite $(u_{3n})\, n \in \mathbb{N}$ converge vers ℓ en tant que suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-5 < u_n < 5.$$

Par passage à la limite,

$$\boxed{-5 \leqslant \ell \leqslant 5}.$$

2.11 Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln\left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right)$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Explication : Notons ℓ la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$. Donc par passage à la limite, $\ell \geqslant 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(v_n)$. Supposons que $\ell > 0$. Alors, par passage à la limite, la continuité de ln et la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(\ell)\,.}$$

Second cas, si $\ell = 0$. Alors par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.}$$

2.12 La limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'existe pas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Explication : Par l'absurde, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers ℓ. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-3 \leqslant u_{2n} \leqslant -2 \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1} > 0.$$

Donc par passage à la limite,

$$-3 \leqslant \ell \leqslant -2 < 0 \qquad \text{et} \qquad \ell \geqslant 0.$$

Impossible et donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$.

2.13 $\lim_{n\to+\infty} u_n \in [-2\,;\,2]$.
Explication : Notons ℓ sa limite. Alors, $u_{n+1} - 2u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - 2\ell = -\ell$. Donc par la continuité de la valeur absolue et la caractérisation séquentielle de la continuité, $|u_{n+1} - 2u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$. Donc par passage à la limite,

$$|l| \leqslant 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{-2 \leqslant \ell \leqslant 2}.$$

2.14 La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ est solution.
Explication : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et est une suite divergente . En effet, la sous-suite des termes pairs stationne et donc converge vers 1 et la sous-suite des termes impairs stationne et donc converge vers 1. Ces deux sous-suites ont donc des limites distinctes 0 et 1. Conclusion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2.15 La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$ est solution.
Explication : En effet :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n > 0}$.
- De plus, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n} = \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}u_{2n+1} < u_{2n+1} \qquad \text{car } u_{2n+1} > 0.$$

  Donc la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas croissante}}$.

Cependant on note que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

On en déduit alors que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

2.16 *Explication :* On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$. On note que $\ell \neq 0$, sinon la suite $(v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ce qui est contradictoire. Donc $\ell \neq 0$ et par passage à la limite,

$$\begin{cases} \ell = (\ell')^2 \\ \ell' = \frac{1}{\ell} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = (\ell')^2 \\ \ell' = \frac{1}{(\ell')^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = (\ell')^2 \\ (\ell')^3 = 1 \\ \ell' \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\ell = \ell' = 1}.$$

2.17 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n\left(2 + (-1)^n\right)$ est une solution.
Explication : En effet,

- On note que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n(2-1) = n$. Donc par le théorème de minoration, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2n} - u_{2n+1} = 6n - (2n+1) = 4n - 1 \geqslant 4 - 1 > 0.$$

Donc la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas croissante}}$.

2.18 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Explication : Notons ℓ sa limite. Puisque $u_{2n} - 2u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - 2\ell = -\ell$. On en déduit que

$$|-\ell| \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\ell = 0}.$$

2.19 Si α est pair, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ou 1 et si α est impair, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$ ou 0 ou 1.
Explication : Notons ℓ sa limite. On a par passage à la limite

$$\ell = \ell^\alpha + 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{c} \ell = 0 \\ \text{OU} \\ \ell^{\alpha-1} = 1 \end{array}.$$

Premier cas, si α est pair, alors $\alpha - 1$ est impair et donc $\ell^{\alpha-1} = 1$ implique $\ell = 1$. Dans ce cas, on a donc

$$\boxed{\ell \in \{0\,;\,1\}\,.}$$

Second cas, si α est impair, alors $\alpha - 1$ est pair et donc $\ell^{\alpha-1} = 1$ admet deux solutions 1 et -1. Dans ce cas,

$$\boxed{\ell \in \{-1\,;\,0\,;\,1\}\,.}$$

2.20 $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant \dfrac{3}{2}$.
Explication : Notons ℓ sa limite. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$. Donc par passage à la limite,

$$|\ell - 3| \leqslant \ell + 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\ell \leqslant \ell - 3 \leqslant \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad -2\ell \leqslant -3 \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\ell \geqslant \frac{3}{2}}.$$

3. **Donner une forme explicite.**

3.1 On reconnait une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a

$$3\,\omega - 2\,\omega + 15 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = -15.$$

Fixons, $\omega = -15$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \omega$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3v_{n+1} = 3u_{n+1} - 3\,\omega = 2u_n - 15 + 45 = 2u_n + 30 = 2\,(u_n + 15) = 2v_n.$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 + 15) = \left(\frac{2}{3}\right)^n (-11 + 15) = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + \omega = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 15.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 15.}$$

On observe que $u_1 = 4 \times \frac{2}{3} - 15 = \frac{8-45}{3} = -\frac{37}{3}$.

3.2 On reconnait une suite récurrente linaire d'ordre 2. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée :

$$(E_c) \; : \qquad r^2 - 2\sqrt{3}r + 4 = 0.$$

Soit Δ son discriminant. $\Delta = 4 \times 3 - 16 = -4 < 0$. Donc les racines sont complexes et conjugués : $\frac{2\sqrt{3}\pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i = 2\frac{\sqrt{3}\pm i}{2} = 2\,\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{6}}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n \left(\lambda \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. Donc

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\left(\lambda \frac{\sqrt{3}}{2} + \mu\frac{1}{2}\right) = 3 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 3. \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n \times 3 \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3 \times 2^n \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).}$$

3.3 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3n$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+2} = u_{n+2} - 3(n+2) &= 10u_{n+1} - 25u_n + 48n - 24 - 3n - 6 \\ &= 10(v_{n+1} + 3(n+1)) - 25(v_n + 3n) + 45n - 30 \\ &= 10v_{n+1} + 30n + 30 - 25v_n - 75n + 45n - 30 \\ &= 10v_{n+1} - 25v_n. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Soit (E_c) son équation caractéristique :

$$(E_c) \; : \qquad r^2 - 10r + 25 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (r-5)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 5.$$

L'équation (E_c) admet donc une unique solution $r_0 = 5$. Alors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = 5^n (\lambda + \mu n).$$

Or $v_0 = u_0 - 0 = -1$ et $v_1 = u_1 - 3 = 5$. Donc

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ 5(\lambda + \mu) = 5 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = -1 \\ -1 + \mu = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5^n(2n-1)$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + 3n = 5^n(2n-1) + 3n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 5^n(2n-1) + 3n.}$$

3.4 On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + 3n = 3n + 1.$$

Dès lors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (3k+1) = 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.}$$

3.5 On démontre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_{n+2}) = \ln\left(\frac{u_{n+1}^5}{u_n^6}\right) = 5\ln(u_{n+1}) - 6\ln(u_n).$$

i.e.

$$v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Soit (E_c) son équation caractéristique :

$$(E_c) \ : \qquad r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Soit Δ son discriminant. On a $\Delta = 25 - 24 = 1$. Donc (E_c) admet deux racines :

$$r_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Alors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \lambda\, 2^n + \mu 3^n.$$

Or $v_0 = \ln(u_0) = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$ et $v_1 = \ln\left(\mathrm{e}^5\right) = 5$. Donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 2\,\lambda + 3\mu = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \mu = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu = 1.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n + 3^n$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{2^n + 3^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \mathrm{e}^{2^n+3^n}.}$$

4. **Monotonie.**

4.1 La suite de terme général $\frac{1}{n}$ est décroissante et la suite de terme général $\frac{1}{n+1}$ est également décroissante donc par somme la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

4.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + \frac{1}{n+1} - n - \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n^2 + n + n - n - 1}{(n+1)\,n} = \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)\,n}.$$

Or pour tout $n \geqslant 1$, $n - 1 \geqslant 0$ donc $n^2 + n - 1 \geqslant 0$ et ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Conclusion, la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$.

4.3 Soit $f : x \mapsto \mathrm{sh}\left(x^2 - x + 3\right)$. La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x-1)\,\mathrm{ch}\left(x^2 - x + 3\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\left(x^2 - x + 3\right) \geqslant 1 > 0$. Donc f' est strictement négative sur $\left]-\infty\,;\, \frac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $\left]\frac{2}{3}\,;\, +\infty\right[$. On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Donc f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$. Conclusion, la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante}}$.

4.4 On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{3} \leqslant (1+1)\frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} < u_n$ et la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

4.5 La fonction $f\ x \mapsto \sqrt{2+x}$ est bien définie sur $[-2\,;+\infty[$. De plus elle est strictement croissante sur cet intervalle en tant que composée de la fonction affine $x \mapsto x+2$ et de la fonction racine carrée toutes deux strictement croissantes. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, $u_1 = f(u_0) = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} > 1 = u_0$ Montrons alors par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Posons pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
Initialisation. Si $n = 0$, alors on a vu $u_1 > u_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ alors, $u_{n+1} > u_n$. Puisque f est strictement croissante,

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(u_n) = u_{n+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

5. **Déterminer la limite d'une suite.**

5.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a par croissance de la fonction arctangente, $\arctan(k) \geqslant \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan(k) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \arctan(k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{4} = n\frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc par le théorème de minoration, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

5.2 On sait que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{3}|x-y|.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant $x = u_n$ et $y = 4$, on a

$$|f(u_n) - f(4)| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - 4|.$$

Or 4 est un point fixe de f et $f(u_n) = u_{n+1}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - 4|.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite contractante. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« } |u_n - 4| \leqslant \frac{1}{3^n}|u_0 - 4|. \text{ »}$$

Démontrons $\mathscr{P}(n)$ par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$. Alors $\frac{1}{3^0}|u_0 - 4| = |u_0 - 4| \geqslant |u_0 - 4|$ et donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors,

$$|u_n - 4| \leqslant \frac{1}{3^n}|u_0 - 4|.$$

Donc par ce qui précède,

$$|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - 4| \leqslant \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n}|u_0 - 4| = \frac{1}{3^{n+1}}|u_0 - 4|.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - 4| \leqslant \frac{1}{3^n} |u_0 - 4| .$$

Or $\frac{1}{3^n} |u_0 - 4| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$|u_n - 4| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

i.e. $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 4}$.

5.3 Effectuons un développement limité. Pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{n-1}{n+1} > 0$ et on a

$$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} .$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$. Donc en posant $u = -\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De même en posant $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a aussi,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-1+o(1)-1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-2}\,\mathrm{e}^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-2}(1+o(1)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-2} + o(1) . \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2} .$$

Conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{-2}.}$$

5.4 On reconnait une suite arithmético-géométrique ! Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a

$$\omega = \frac{\omega - 8}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = -8.$$

Posons $\omega = -8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \omega = u_n + 8$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 8 = \frac{u_n - 8}{2} + 8 = \frac{u_n - 8 + 16}{2} = \frac{u_n + 8}{2} = \frac{v_n}{2}.$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{v_0}{2^n} = \frac{u_0 + 8}{2^n} = \frac{3}{2^n}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + \omega = \frac{3}{2^n} - 8.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -8.}$$

5.5 *Méthode 1.* Posons $f : x \mapsto x^2 + 1$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, une partie stable de f. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 2 \geqslant 2 > 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{R}_+$ et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit (par récurrence) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

Premier cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, on en déduit qu'elle converge vers un réel ℓ. La fonction f étant continue, par passage à la limite, on a

$$\ell = f(\ell) \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = \ell^2 + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell^2 - \ell + 2 = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 1 - 8 < 0$ ce qui est contradictoire.

Second cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De même que précédemment, si elle converge, elle doit nécessaire converger vers un point fixe de f. Or nous avons vu que f ne possède aucun point fixe. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente. Donc par sa monotonie nécessairement elle diverge vers $+\infty$.

Conclusion, le seul cas possible est le suivant :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Méthode 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2 \geqslant 2 > 1.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 > u_n > 1$ et donc

$$u_{n+1} > u_n + 2.$$

Donc par récurrence, $u_n > u_0 + 2n$ ou par une petite somme télescopique, on a

$$u_{n+1} - u_0 = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) > \sum_{k=0}^{n} 2 = 2(n+1). \qquad \textit{joli non ?}$$

Donc par le théorème de minoration,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$