

## Interrogation 18 d'entraînement

### Polynômes

#### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir le polynôme dérivé.
- 1.2 Énoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
- 1.3 Énoncer les deux formules de Taylor pour les polynômes.
- 1.4 Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
- 1.5 Définir une racine de multiplicité  $m$ .
- 1.6 Caractériser la multiplicité à l'aide des dérivées.
- 1.7 Préciser l'écriture de l'ensemble des nains aimables ayant de l'humour.

#### Révisions

- 1.8 Énoncer la propriété donnant la transposée du produit.
- 1.9 Définir une matrice symétrique/antisymétrique.
- 1.10 Énoncer les opérations élémentaires.
- 1.11 A l'aide des opérations élémentaires donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice.
- 1.12 Énoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions (Prop II.3).
- 1.13 Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique? (Prop II.4)
- 1.14 Énumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.

#### 2. Déterminer un degré.

- 2.1 Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $n = \deg(P) \geq 3$  et  $Q = XP - X^2P^{(3)} + 5X^4P''$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.2 Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $P = \sum_{k=0}^{4n+1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) X^k$ . Déterminer  $\deg(P)$ .
- 2.3 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P = X^n$  et  $Q = P(X+1) - P(X-1)$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.4 Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $n = \deg(P) \geq 2$  et  $Q = (X^3 - 5)P'' + X^2 \circ P$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.5 Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P = \sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)^2 X^k$  et  $Q = P(X) + P(-X)$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.6 Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $n = \deg(P) \geq 2$  et  $Q = P \circ (P + 3X)$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.7 Soient  $n \geq 2$ ,  $P = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} X^k}{k}$  et  $Q = P - X^2P''$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.8 Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $n = \deg(P) \geq 3$  et  $Q = X^2P + X^2 \circ P + X^2 + P$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.9 Quel est le degré de  $R$  le reste de la division euclidienne de  $\sum_{k=0}^{11} (-1)^k X^k$  par  $X - 1$ ?
- 2.10 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{(2k)!}$  et  $Q = P(X^2) - (P(X^2))'' - \frac{X^{2n}}{(2n)!}$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.11 Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $n = \deg(P) \geq 2$  et  $Q = P \circ P \circ P - P^3$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .
- 2.12 Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P = \sum_{k=0}^n (-1)^k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^n (-1)^k P^k$ . Déterminer  $\deg(Q)$ .

#### Calculer une composition.

En justifiant, calculer le polynôme et le degré demandés.

- 2.13 On pose  $P = X^2 - 2X + 3$  et  $Q = 2X + 3$ . Calculer  $P \circ Q$  et donner son degré.
- 2.14 On pose  $P = \frac{X^2}{3}$ . Calculer  $P \circ P$  et donner son degré.
- 2.15 On pose  $P = X^5$  et  $Q = 2X^2 + 1$ . Calculer  $P \circ Q$  et donner son degré.
- 2.16 On pose  $P = 7X + 4$  et  $Q = X^8 - X^6 + X^4 + 1$ . Calculer  $P \circ Q$  et donner son degré.
- 2.17 On pose  $P = \frac{X}{2} + 1$ . Pour  $n \geq 1$ , calculer  $R = \underbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}_{n \text{ fois}}$  et donner son degré.

**3. Résoudre une équation polynomiale.**

- 3.1 Résoudre dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $X^2P = P^2$ .
- 3.2 Résoudre dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $P'P'' = 6P$ .
- 3.3 Résoudre dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $(2X^2 + X + 1)P'' = (X + 1)P' + 2P$ .
- 3.4 Résoudre dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $P(X^3) = (X^2 + X + 1)P$
- 3.5 Résoudre dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $P = P(X + 1)$ .
- 3.6 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}[X]$ ,  $P' + P = \frac{X^n}{n!}$ .

**4. Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  ou  $\mathbb{R}[X]$ .**

- 4.1 Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P = X^3 + (7 - 2i)X^2 - (1 + 14i)X - 7$ .
- 4.2 Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P = X^4 + 16$ .
- 4.3 Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P = X^3 + X^2 + 5X - 7$ .
- 4.4 Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P = X^4 - 11X^3 + 27X^2 + 11X - 28$ .
- 4.5 Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P = X^6 - 3X^5 + 5X^4$ .
- 4.6 Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P = X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 4X - 4$ .
- Remarquer que  $i$  est une racine de  $P$ .*

**5. Déterminer la limite d'une suite complexe.**

- 5.1 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$ .
- 5.2 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$u_n = \frac{12n + (5 + 2i)n^2 - (6 + 3i)n^3}{1 + 3n^2 - 5n^3}.$$

- 5.3 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{1}{n}e^{in}$ .
- 5.4 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = 5 + \frac{3}{n} + i(-1)^n$ .
- 5.5 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence par  $u_0 = -5 + 3i$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = \frac{-1+i}{7}u_n$ .

**6. BONUS (ne sera pas à l'interro) : calculer une évaluation.**

- 6.1 On pose  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$  et  $P = (X + 1)^2$ . Calculer  $P(A)$ .
- 6.2 On pose  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P = \sum_{k=0}^n X^k$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $P(A)$ .
- 6.3 On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P = \sum_{k=0}^n [X^k - k2^{k-1}(X - 2)]$ . Calculer  $P(A)$ .
- 6.4 On pose  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6$ . Calculer  $P(f)$  pour l'opérateur de composition.
- 6.5 On pose  $f : x \mapsto [x] + 2$  et  $P = \sum_{k=0}^n kX^k$ . Calculer  $P(f)$  pour l'opérateur de composition.
- 6.6 On pose  $f : x \mapsto x^2 + 1$  et  $P = X^2 - 2X + 1$ . Calculer  $P(f)$  pour l'opérateur de composition.