

Interrogation 18 d'entraînement

Espaces vectoriels

1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
- 1.2 Définir la somme de deux espaces vectoriels.
- 1.3 Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
- 1.4 Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
- 1.5 Énoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.
- 1.6 Définir un espace de Hilbert.

Révisions

- 1.7 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
- 1.8 Énoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
- 1.9 Donner une condition nécessaire à l'existence d'un développement limité à l'ordre n . Préciser le cas $n = 0$ et $n = 1$.
- 1.10 Énoncer l'unicité du développement limité.
- 1.11 Énoncer la propriété permettant de primitiver un développement limité.
- 1.12 Énoncer la formule de Taylor-Young.

2. Reconnaître un espace vectoriel.

Démontrer si E est un espace vectoriel ou non.

- 2.1 $E = [-1; 1]$.
- 2.2 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^3 = 0\}$.
- 2.3 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.
- 2.4 $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ majorée par } 1\}$.
- 2.5 $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + 1 \text{ divise } P\}$.
- 2.6 $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid X^3 P^{(3)} = P(X^2 + 1)\}$.
- 2.7 $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = f(1) - 1 \right\}$.
- 2.8 $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$, où $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2.9 $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, f \text{ est } k\text{-périodique}\}$.
- 2.10 $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + nu_n\}$.
- 2.11 $E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n) \right\}$.
- 2.12 $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ lipschitzienne}\}$.
- 2.13 $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de signe constant}\}$.
- 2.14 $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$.
- 2.15 $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ 2-lipschitzienne}\}$.
- 2.16 $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = P''(1)\}$.

3. Déterminer une intersection ou une somme d'espaces vectoriels.

3.1 Soient $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P''(1) = 0\}$. Calculer $F \cap G$.

3.2 Soient $F = \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Calculer $F \cap G$.

3.3 Soient $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et $G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$. Calculer $F \cap G$.

3.4 Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = f\}$ et $G = \text{Vect}(\text{ch}, \cos)$. Calculer $F + G$.

3.5 Soient $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$ et $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$. Calculer $F + G$.

3.6 Soient $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. Calculer $F + G$.

4. Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires.

4.1 Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R}\}$ et $G = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4.2 Montrer que $F = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ et $G = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4.4 Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

4.5 Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 7f = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5. Déterminer la multiplicité d'une racine.

5.1 Déterminer la multiplicité de 1 pour le polynôme $5X^5 - 13X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 7X - 3$.

5.2 Déterminer la multiplicité de -1 pour le polynôme $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.

5.3 Déterminer la multiplicité de 2 pour le polynôme $(X - 2)^2(X^2 - 13X + 22)$.

5.4 Déterminer la multiplicité de j pour le polynôme $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$.

5.5 Montrer que $X^2 + 2X + 1$ divise $X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$.

5.6 Montrer que $X^2 - 4X + 4$ divise $X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 8X + 4$.