Correction de l'interrogation 20 d'entrainement
Familles de vecteurs

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est libre si et seulement si

- Aucun des vecteurs de $\mathscr{L}$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
- i.e. pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

1.2 Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est liée si et seulement si

- L'un des vecteurs au moins de $\mathscr{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
- i.e. il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, tel que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

1.3 Soient E un espace vectoriel non nul et $\mathscr{G}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{G}$ est génératrice dans E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{G})$.

1.4 Soient E un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si

- $\mathscr{B}$ est libre et génératrice dans E
- i.e.
$$\forall x \in E,\ \exists!\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

1.5 Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors,

- $F \cap G = \{0_E\} \ \Leftrightarrow\ \mathscr{B}$ est libre.
- $F + G = E \ \Leftrightarrow\ \mathscr{B}$ est génératrice dans E.
- $F \oplus G = E \ \Leftrightarrow\ \mathscr{B}$ est une base de E.

1.6 Pour avoir avoir les coordonnées d'une/un $\mathscr{B}_G$, il suffit (ou plutôt « il faut » cela ressemble plus à une condition nécessaire que suffisante...) de demander à la fille ou au garçon si elle/il est libre, surtout si elle/il est canon. C'est la base. Pour engendrer faut peut-être attendre un peu...

2. **Familles génératrices.**

2.1 On a les égalités entre ensembles suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x - z = 0 \\ -3y + t = 0 \\ 2x + 9y - 2z - 3t = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x = z \\ t = 3y \\ 2z + 9y - 2z - 9y = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (z,y,z,3y) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{G} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \text{ est génératrice dans } F}$.

2.2 On considère l'équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants d'inconnue f deux fois dérivable :

$$(E) \qquad f''+3f'+5f=0$$

Soit

$$(E_c) \qquad r^2+3r+5=0,$$

l'équation caractéristique associée. Son discriminant vaut $\Delta = 9-20=-11<0$. Les racines de (E_c) sont donc $r_1=\frac{-3+i\sqrt{11}}{2}$ et $r_2=\frac{-3-i\sqrt{11}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)\right)\end{array} \middle| (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)\end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)\end{array}\right)\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{G} = \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)\end{array}, \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-3x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{11}x}{2}\right)\end{array}\right) \text{ est génératrice dans } F}$.

2.3 Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) &= \mathrm{Vect}\left(1,1-X,X-X^2,X^2-X^3\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(1,X,X-X^2,X^2-X^3\right) && C_2\leftarrow C_1-C_2 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1,X,X^2,X^2-X^3\right) && C_3\leftarrow C_2-C_3 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1,X,X^2,X^3\right) && C_4\leftarrow C_3-C_4 \\ &= \mathbb{R}_3[X], \end{aligned}$$

car on reconnait alors la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est bien génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{G} \text{ est génératrice dans } \mathbb{R}_3[X].}$$

2.4 Montrons que $F=\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. Soit $f\in F=\mathrm{Vect}\left(\cos^2,\sin^2\right)$, alors il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f=\lambda\cos^2+\mu\sin^2$. Par linéarisation,

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=\lambda\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)+\mu\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)=\frac{\lambda+\mu}{2}+\frac{\lambda-\mu}{2}\cos(2x).$$

Donc $f\in\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ et ainsi $F\subseteq\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. Attention, cela ne suffit pas pour que $\mathscr{G}$ soit génératrice dans F, car il faut que $\mathscr{G}$ soit une famille de vecteurs de F. Exemple il serait inexact de dire que $\left(1,X,X^2\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ car $X^2\notin\mathbb{R}_1[X]$.
Réciproquement si $f\in\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$, alors il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x) &= \lambda+\mu\cos(2x) \\ &= \lambda\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)+\mu\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right) \\ &= (\lambda+\mu)\cos^2(x)+(\lambda-\mu)\sin^2(x). \end{aligned}$$

Donc $f\in F$ et $\mathrm{Vect}(\mathscr{G})\subseteq F$. Conclusion, $F=\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ et $\boxed{\mathscr{G} \text{ est une famille génératrice de } F}$.
Méthode 2. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) &= \mathrm{Vect}\left(x\mapsto 1,\ x\mapsto\cos(2x)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\cos^2+\sin^2,\ \cos^2-\sin^2\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\cos^2+\sin^2,\ 2\cos^2\right) && C_2\leftarrow C_2+C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left(\cos^2+\sin^2,\ \cos^2\right) && C_2\leftarrow \frac{1}{2}C_2 \\ &= \mathrm{Vect}\left(\sin^2,\ \cos^2\right) && C_1\leftarrow C_1-C_2 \\ &= \mathrm{Vect}\left(\cos^2,\ \sin^2\right) && C_1\leftrightarrow C_2. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{F=\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) \text{ et } \mathscr{G} \text{ est génératrice dans } F}$.

2.5 Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-5&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_4\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow -\tfrac{1}{5}C_1\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_3 \leftarrow C_3 - C_1\\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1\end{array}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}\right) && C_2 \leftrightarrow C_4\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l}C_3 \leftarrow C_3 - C_2\\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_2\end{array}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\right) && C_3 \leftrightarrow C_4\\
&= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)}_{\text{base canonique de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} && C_4 \leftarrow \tfrac{1}{3}C_4
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et donc } \mathscr{G} \text{ est génératrice dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

3. **Familles libres/liées.**

3.1 Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0\\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0\\ 0 = 0\\ -3\lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0\end{cases} \qquad \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1\\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0\\ -3\lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0\\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0\\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0\end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0\\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0\end{cases} \qquad \text{car } L_4 = -L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = -2\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{2\lambda_4}{3} - \lambda_4 = -\frac{\lambda_4}{3}\\ \lambda_2 = \frac{\lambda_4 - 2\lambda_3}{3} = -\frac{\lambda_4}{3}\\ \lambda_3 = \lambda_4\end{cases}$$

En particulier $(-1,-1,3,3)$ est une solution **non nulle**. Donc il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ tel que

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\\2\end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Conclusion, $\boxed{\mathscr{L} \text{ est liée}}$.

3.2 Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = 0_2.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_3 & -\lambda_1+\lambda_2\\ -\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_3\end{pmatrix} = 0_2 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\lambda_1-\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2=0\\ -\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\lambda_1=\lambda_3\\ \lambda_1=\lambda_2\\ \lambda_2=\lambda_3\\ \lambda_3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \qquad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre}}$.

3.3 Soient $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i = 0_E$. Alors,

$$0_E = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{i} u_j.$$

On reconnait une somme triangulaire. Ainsi,

$$0_E = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant p} \lambda_i\, u_j = \sum_{j=1}^{p} u_j \sum_{i=j}^{p} \lambda_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j u_j,$$

où pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $\mu_j = \sum_{i=j}^{p} \lambda_i$. Or la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est libre. Donc

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \qquad \mu_j = 0_{\mathbb{K}}.$$

On obtient donc

$$\begin{cases}
\mu_1 = & \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p & =0\\
\mu_2 = & \lambda_2+\cdots+\lambda_p & =0\\
\vdots & \vdots & \\
\mu_p = & \lambda_p & =0
\end{cases}$$

Le système est échelonné, avec un pivot à chaque ligne, il admet donc une unique solution :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Conclusion, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{L} = (v_1,\dots,v_p) \text{ est libre}}$.

3.4 Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$P = \lambda_1\, X\,(X-1)^2 + \lambda_2\, X^2\,(X-1) + \lambda_3\, X^3 + \lambda_4\,(X-1)^3 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}.$$

Alors,
$$P(1) = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad P(0) = -\lambda_4 = 0.$$
Donc
$$0 = P = \lambda_1 X (X-1)^2 + \lambda_2 X^2 (X-1) = X(X-1)\left[\lambda_1 (X-1) + \lambda_2 X\right].$$
Ainsi
$$Q = \lambda_1 (X-1) + \lambda_2 X = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$
Donc $Q(0) = -\lambda_1 = 0 = Q(1) = \lambda_2$. Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Conclusion, $\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre}}$.

3.5 Notons $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_2 : x \mapsto |x-1|$ et $f_3 : x \mapsto |x+1|$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lambda_1 |x| + \lambda_2 |x-1| + \lambda_3 |x+1| = 0$$
En évaluant en 0, 1, et -1 respectivement, on obtient
$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$
Conclusion, $\boxed{\mathscr{L} \text{ est libre}}$.

3.6 Posons pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, $f_k : x \mapsto \sin\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sin(x) \\ f_1(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) \\ f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \\ f_3(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x). \end{aligned}$$
On observe alors en particulier que
$$f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} f_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_2.$$
Donc f_1 est une combinaison linéaire de f_0 et f_2. Conclusion, $\boxed{\mathscr{L} \text{ est liée}}$.

4. **Coordonnées d'un vecteur.**

4.1 La famille $\mathscr{B}$ est libre et par définition elle engendre E donc $\mathscr{B}$ est une base de E. Pour tout $k \in [\![1;5]\!]$, on pose $f_k : x \mapsto \sin(kx)$ et $f_0 : x \mapsto 1$. On a donc $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$. On a par la formule d'Euler, celle de Moivre, celle de Newton et le triangle de Pascal pour les coefficients (ouf le beau monde invité ici !),
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin^5(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^5 \\ &= \frac{1}{(2i)^4} \frac{\mathrm{e}^{5ix} - 5\,\mathrm{e}^{4ix-ix} + 10\,\mathrm{e}^{3ix-2ix} - 10\,\mathrm{e}^{2ix-3ix} + 5\,\mathrm{e}^{ix-4ix} - \mathrm{e}^{-5ix}}{2i} \\ &= \frac{1}{16} \frac{\mathrm{e}^{5ix} - \mathrm{e}^{-5ix} - 5\,\mathrm{e}^{3ix} + 5\,\mathrm{e}^{-3ix} + 10\,\mathrm{e}^{ix} - 10\,\mathrm{e}^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)}{16}. \end{aligned}$$
D'où
$$f = 0 \times f_0 + \frac{10}{16} f_1 + 0 \times f_2 - \frac{5}{16} f_3 + 0 \times f_4 + \frac{1}{16} f_5.$$

Par conséquent, $\boxed{f \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = E \text{ et ses coordonnées dans la base } \mathscr{B} \text{ sont } \left(0, \frac{10}{16}, 0, -\frac{5}{16}, 0, \frac{1}{16}\right)}$.
Pour les curieux, montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soient $(\lambda_i)_{i\in[\![0;5]\!]} \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\sum_{i=0}^{5} \lambda_i\, f_i = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

En particulier si $x = 0$,

$$0_{\mathbb{R}} = \sum_{i=0}^{5} \lambda_i\, f_i(x) = \lambda_0 + 0 = \lambda_0\,.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) + \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_4 \sin(4x) + \lambda_5 \sin(5x) = 0. \tag{1}$$

En prenant $x' = x + \pi$, on obtient également

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 &= \lambda_1 \sin(x+\pi) + \lambda_2 \sin(2x+2\pi) + \lambda_3 \sin(3x+3\pi) + \lambda_4 \sin(4x+4\pi) + \lambda_5 \sin(5x+5\pi)\\ &= -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) - \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_4 \sin(4x) - \lambda_5 \sin(5x) \qquad (2)\end{aligned}$$

En faisant (1)+(2), on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2\,\lambda_2 \sin(2x) + 2\,\lambda_4 \sin(4x) = 0$$

Donc pour $x = \frac{\pi}{4}$, $2\,\lambda_2 = 0$ i.e. $\lambda_2 = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$, $\lambda_4 = 0$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 \sin(x) + \lambda_3 \sin(3x) + \lambda_5 \sin(5x) = 0.$$

Utilisons une autre technique pour varier un peu. On a alors au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}0 &\underset{x\to 0}{=} \lambda_1 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) + \lambda_3 \left(3x - \frac{3^2x^3}{6} + \frac{3^5x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) + \lambda_5 \left(5x - \frac{5^2x^3}{2} + \frac{5^5x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} (\lambda_1 + 3\,\lambda_3 + 5\,\lambda_5)\, x - \frac{x^3}{6}\left(\lambda_1 + 3^3\,\lambda_3 + 5^3\,\lambda_5\right) + \frac{x^5}{120}\left(\lambda_1 + 3^5\,\lambda_3 + 5^5\,\lambda_5\right) + o\left(x^5\right)\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on obtient

$$\begin{cases}\lambda_1 + 3\,\lambda_3 + 5\,\lambda_5 &= 0\\ \lambda_1 + 3^3\,\lambda_3 + 5^3\,\lambda_5 &= 0\\ \lambda_1 + 3^5\,\lambda_3 + 5^5\,\lambda_5 &= 0\end{cases}$$

On échelonne le système et on obtient finalement que $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$. Or nous avions aussi $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Conclusion, $\mathscr{B}$ est libre et ça nous fait plaisir.

4.2 La famille $\mathscr{B}$ est échelonnée en ses degrés donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est libre dans } \mathbb{R}_n[X]}$ et est donc une base de $\operatorname{Vect}(\mathscr{B})$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la formule de Taylor pour les polynômes,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k\,.$$

Donc $\boxed{P \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B})}$ et ainsi $\mathbb{R}_n[X] \subseteq \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$. Or $\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ et donc $\mathbb{R}_n[X] = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$. La famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, toujours par la formule de Taylor, on conclut

$$\boxed{\text{les coordonnées de } P \text{ dans } \mathscr{B} \text{ est } \left(P(1), P'(1), \frac{P''(1)}{2}, \ldots, \frac{P^{(n)}(1)}{n!}\right).}$$

Chanmé non ?

4.3 Les vecteurs $e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc $\mathscr{B}$ est libre et est donc une base de Vect $(\mathscr{B})$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u = \lambda e_1 + \mu e_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda + \mu \\ 3\lambda - \mu \\ -\lambda - 2\mu \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda + \mu = 5 \\ 3\lambda - \mu = 0 \\ -\lambda - 2\mu = -7 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda + \mu = 5 \\ \mu = 3\lambda \\ -\lambda - 2\mu = -7 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda + 3\lambda = 5 \\ \mu = 3\lambda \\ -\lambda - 6\lambda = -7 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{cases} .
\end{aligned}$$

On a bien une solution, donc $u = e_1 + 3e_2 \in \text{Vect}(\mathscr{B})$ et ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(1, 3)$.

4.4 Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a - b + c \\ -a + ib + ic \\ ia + b - c \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^3} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -a + ib + ic = 0 \\ ia + b - c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b + c = 0 \\ (i-1)\, b + (i+1)\, c = 0 \\ (1+i)\, b + (-1-i)\, c = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - iL_1 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b + c = 0 \\ (i-1)\, b + (i+1)\, c = 0 \\ \left(-1 - i - \frac{1+i}{-1+i}\,(1+i)\right) c = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{1+i}{-1+i} L_2
\end{aligned}$$

Or

$$-1 - i - \frac{1+i}{-1+i}\,(1+i) = -1 - i - \frac{(1+2i-1)\,(-1-i)}{2} = -1 - i + \frac{2i\,(1+i)}{2} = -1 - i + i - 1 = -2 \neq 0.$$

Donc en remontant le système, on obtient $c = 0$ puis $b = 0$ et $a = 0$. D'où $\mathscr{B}$ est libre. D'autre part, les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère générateur et on obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\i\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\i\\-1\end{bmatrix}\right) & \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\i-1\\1+i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\i+1\\-1-i\end{bmatrix}\right) & \begin{array}{l}C_2 \leftarrow C_2+C_1\\ C_3 \leftarrow C_3-C_1\end{array}\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2i\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\i+1\\-1-i\end{bmatrix}\right) & C_2 \leftarrow C_2+C_3\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\i+1\\-1-i\end{bmatrix}\right) & C_2 \leftarrow \tfrac{1}{2i}C_2-C_3\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1-i\end{bmatrix}\right) & \begin{array}{l}C_1 \leftarrow C_1+C_2\\ C_3 \leftarrow C_3-(1+i)\,C_2\end{array}\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) & C_3 \leftarrow \tfrac{1}{-1-i}C_3\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) & C_1 \leftarrow C_1-iC_3\\
&= \mathbb{C}^3 \qquad \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{C}^3. &
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathbb{C}^3$. Or $\mathscr{B}$ est aussi libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}^3.}$$

Notons (e_1, e_2, e_3) les trois vecteurs de $\mathscr{B}$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u = ae_1+be_2+ce_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}1+i\\1-i\\i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a-b+c\\-a+bi+ci\\ai+b-c\end{bmatrix} & \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}a-b+c=1+i\\-a+bi+ci=1-i\\ai+b-c=i\end{cases} & \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}a-b+c=1+i\\b(-1+i)+c(1+i)=2\\b(1+i)+c(-1-i)=1\end{cases} & \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2+L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-iL_1\end{array}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}a-b+c=1+i\\b(-1+i)+c(1+i)=2\\2ib=3\end{cases} & L_3 \leftarrow L_3+L_2\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}a-b+c=1+i\\b(-1+i)+c(1+i)=2\\b=-\frac{3i}{2}\end{cases} &
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
c = \frac{1}{1+i}\left(2-b(-1+i)\right) = \frac{1}{1+i}\left(2+\frac{3i}{2}(-1+i)\right) = \frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{2}\right) &= \frac{(1-i)(1-3i)}{4}\\
&= \frac{-2-4i}{4}\\
&= -\frac{1}{2}-i
\end{aligned}$$

et
$$a = 1 + i + b - c = 1 + i - \frac{3i}{2} + \frac{1}{2} + i = \frac{3+i}{2}.$$
On a donc
$$u = ae_1 + be_2 + ce_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{3+i}{2} \\ b = -\frac{3i}{2} \\ c = -\frac{1}{2} - i. \end{cases}$$
Pensez à vérifiez vos calculs en calculant $ae_1 + be_2 + ce_3$.

Conclusion, $\boxed{\text{les coordonnées de } u \text{ dans } \mathscr{B} \text{ sont } \left(\frac{3+i}{2}, -\frac{3i}{2}, -\frac{1}{2} - i\right)}$.

4.5 Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$a\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = 0_2.$$
On a alors
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a+d & a+b+d\\b+c+d & c+2d\end{pmatrix} = 0_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + d = 0 \\ a + b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + d = 0 \\ b = 0 \\ b + c + d = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + d = 0 \\ b = 0 \\ c + d = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + d = 0 \\ b = 0 \\ c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0.
\end{aligned}$$
Donc $\mathscr{B}$ est libre.

D'autre part, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Dès lors,
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(\mathscr{B}) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}\right) && C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) && C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_4 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) && C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\
&= \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) && \text{car l'on reconnait la base canonique de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$
Donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Or $\mathscr{B}$ est libre. Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Notons (E_1, E_2, E_3, E_4) les quatre matrices de $\mathscr{B}$. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
J = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & a+b+d \\ b+c+d & c+2d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1 \\ a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \\ c+2d=-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ b+c+d=0 \\ c+2d=-1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ c+d=1 \\ c+2d=-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1 \\ b=-1 \\ c+d=1 \\ d=-2 \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=3 \\ d=-2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{les coordonnées de } J \text{ dans } \mathscr{B} \text{ sont } (3, -1, 3, -2)}$.

5. **Théorème de la base adaptée.**

 5.1 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} -x+y+z & =0 \\ x+y-z & =0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} -x+y+z & =0 \\ 2y & =0 \end{array} \right\} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} x & =z \\ y & =0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ (z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $e_1 = (1, 0, 1)$ et $\mathscr{B}_F = (e_1)$. Puisque $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\mathscr{B}_F$ est libre et par ce qui précède génératrice de F. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. D'autre part,

$$G = \left\{ (x+y, x+y, y) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Posons $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathscr{B}_G = (e_2, e_3)$. Les vecteurs e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_G$ est libre et par ce qui précède génératrice dans G. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G.

Posons maintenant $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ 2c=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad a=b=c=0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.
D'autre part, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) && \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftrightarrow C_2 - C_3 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_1 - C_3 \\
&= \mathbb{R}^3 && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice. Or $\mathscr{B}$ est aussi libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, on a $\mathscr{B}_F$ base de F, $\mathscr{B}_G$ base de G et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ base de $\mathbb{R}^3$. Donc par le théorème de la base adaptée on en déduit que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

5.2 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathscr{B}_F$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique. Elle est de plus génératrice dans F et donc forme une base de F.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} a-b=0 \\ a+b-2c=0 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{matrix} b=a \\ 2a-2c=0 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$. La famille $\mathscr{B}_G$ est libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires. Elle est de plus génératrice dans G par ce qui précède et donc forme une base de G.
Enfin, on pose $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0_2.$$

Dès lors,

$$\begin{cases} a + c = 0\\ b + c = 0\\ c = 0\\ d = 0\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. On a donc

$$\begin{aligned}\text{Vect}(\mathscr{B}) &= Vect\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= Vect\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2\\ &= \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{car on reconnait la base canonique de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus $\mathscr{B}$ est libre. Donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Donc par le théorème de la base adaptée, on en conclut que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

5.3 Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = -\frac{a_2}{3} - \frac{a_1}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad P = a_2\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + a_1\left(X - \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F = \text{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3},\ X - \frac{1}{2}\right).$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(X^2 - \frac{1}{3},\ X - \frac{1}{2}\right)$. La famille $\mathscr{B}_F$ est libre car les deux polynômes ne sont pas colinéaires. Elle est de plus génératrice dans F et forme donc une base de F.
Posons $G = \text{Vect}(1)$. Alors $\mathscr{B}_G = (1)$ est libre (car $1 \neq 0$) et génératrice dans G donc forme une base de G. Posons également $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$a\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(X - \frac{1}{2}\right) + c = 0_{\mathbb{R}_2[X]}.$$

Alors, par unicité des coefficients d'un polynôme :

$$aX^2 + bX + \left(c - \frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0\\ b = 0\\ c - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}\text{Vect}(\mathscr{B}) &= \text{Vect}\left(X^2 - \frac{1}{3},\ X - \frac{1}{2},\ 1\right) = \text{Vect}\left(X^2,\ X,\ 1\right) \qquad \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + \frac{1}{3}C_3\\ C_2 \leftarrow C_2 + \frac{1}{2}C_3\end{matrix}\\ &= \mathbb{R}_2[X] \qquad \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}_2[X].\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Or $\mathscr{B}$ est libre donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Donc par le théorème de la base adaptée on en déduit que

$$\boxed{G = \text{Vect}\,(1) \text{ est bien un supplémentaire à } F \text{ dans } \mathbb{R}_2[X].}$$

5.4 Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \in F \quad \Leftrightarrow \quad P(1) = P'(1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \text{ est racine de multiplicité au moins 2 de } P\\
&\Leftrightarrow \quad (X-1)^2 \text{ divise } P\\
&\Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], \qquad P = Q\,(X-1)^2\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}, \qquad P = (aX+b)\,(X-1)^2\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}, \qquad P = aX\,(X-1)^2 + b\,(X-1)^2\,.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect}\left(X\,(X-1)^2,\ (X-1)^2\right).$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(X\,(X-1)^2,\ (X-1)^2\right)$. Les deux polynômes ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_F$ est libre et par ce qui précède génératrice dans F. Donc $\mathscr{B}_F$ forme une base de F. Posons $\mathscr{B}_G = (X, 1)$ et $G = \text{Vect}\,(\mathscr{B}_G)$. La famille $\mathscr{B}_G$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et engendre G donc forme une base de G. Posons enfin $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Puisque $\mathscr{B}$ est échelonnée en ses degrés, on en déduit déjà que $\mathscr{B}$ est libre. Montrons qu'elle est aussi génératrice. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\text{Vect}\,(\mathscr{B}) &= \text{Vect}\left(X^3 - 2X^2 + X,\ X^2 - 2X + 1,\ X,\ 1\right)\\
&= \text{Vect}\left(X^3 - 2X^2,\ X^2,\ X,\ 1\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3\\ C_2 \leftarrow C_2 + 2C_3 - C_4 \end{array}\\
&= \text{Vect}\left(X^3,\ X^2,\ X,\ 1\right) && C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3\\
&= \mathbb{R}_3[X] && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}_3[X].
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathbb{R}_3[X]$. Or $\mathscr{B}$ est libre et donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. De plus $\mathscr{B}_F$ est une base de F et $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Donc par le théorème de la base adaptée, on en déduit que

$$\boxed{G \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}_3[X].}$$

5.5 On a

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; d = -a-b-c \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ c & -a-b-c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}\\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$. Posons également $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Dès lors,

$$\begin{cases} a = 0\\ b = 0\\ c = 0\\ -a-b-c+d = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_4 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_4 \end{array} \\
&= \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R}) && \text{car on reconnait la base canonique de } \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice dans $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$. De plus $\mathscr{B}$ est libre et est donc une base de $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$.
De plus, $\mathscr{B}_F$ est une sous-famille de $\mathscr{B}$ et est donc libre. Or elle engendre F et forme donc une base de F.
Puisque $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \neq 0_2$, on en déduit que $\mathscr{B}_G$ est libre et génératrice dans G donc forme une base de G.
Par conséquent, d'après le théorème de la base adaptée, on en déduit que

$$\boxed{G \text{ est un supplémentaire de } F.}$$