Correction de l'interrogation 21 d'entrainement Séries numériques

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique.

- On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement si et seulement si la suite des termes généraux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
- Par contraposée, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors la suite des termes généraux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 tandis que la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

1.2 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Une série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si son exposant vérifie $\alpha > 1$.

1.3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que

$$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\qquad 0\leqslant u_n\leqslant v_n.$$

Dans ce cas, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Par contraposée, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

1.4 Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. Si

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang (ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

1.5 Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique.

- On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.
- La converge absolue implique la convergence.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument car $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la série harmonique.

1.6 Une série harmonique bien sûr. Et par la suite, même si les épisodes tendent de plus en plus à être nuls, la série harmonique elle ne se limite pas à être grossière. En somme, dans un film d'horreur on y ranime Satan, alors que la série harmonique elle, c'est l'inverse : par Riemann, ça tend pas.

2. **Nature d'une série par équivalent.**

2.1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2^n+3^n}{5n^3-\ln(n)+5^n}$. On a $2^n + 3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$ et $5n^3 - \ln(n) + 5^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 5^n$. Donc par quotient d'équivalents, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $3/5 \in]-1;1[$. Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0$. Conclusion, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n+3^n}{5n^3-\ln(n)+5^n} \text{ converge.}}$$

2.2 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$. On sait que

$$\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right).$$

Alors

- $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,
$$-\frac{v_n^2}{2} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad -\frac{w_n^2}{2} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
- $o\left(v_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(w_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{2}{n^2} > 0$. Conclusion, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \text{ converge.}}$$

2.3 On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln(n)} = \mathrm{e}^{-\ln(n)-\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}.$$

Or par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} = 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). Or $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$. Conclusion, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} \text{ diverge.}}$$

2.4 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. On a alors les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} u_n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \mathrm{e}\left[1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2n}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}}{2n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{2n}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\mathrm{e}}{2n} > 0$. Conclusion, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ diverge.}}$$

2.5 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\left[2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. On a alors les égalités asymptotiques suivantes :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\left[2\ln\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On sait que

$$\ln(1+v) \underset{v\to 0}{=} v - \frac{v^2}{2} + o\left(v^2\right).$$

Or on a

- $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- De plus,

$$v_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

  Donc

$$-\frac{v_n^2}{2} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Enfin, $o\left(v_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc

$$\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}+\frac{1}{24n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n}-\frac{2}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} -\left[-\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\left[-\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^2}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{6n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{6n^2} > 0$. Conclusion, par le théorème des équivalents de séries numériques à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

3. **Théorème de comparaison.**

3.1 On sait que $n^2 \underset{n\to+\infty}{\ll} n!$ i.e. que $\frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{n^2}$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 < \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

De plus $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \text{ converge.}}$$

3.2 On applique la règle du n^2 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^2 \frac{\ln(n)}{n^3} = \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant n^2 \frac{\ln(n)}{n^3} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant \frac{\ln(n)}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^3} \text{ converge.}}$$

3.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant r_n < 5$ et donc $0 < \mathrm{e}^{-5} \leqslant \mathrm{e}^{-r_n} \leqslant 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \frac{\mathrm{e}^{-5}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-r_n}}{\sqrt{n}}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^{-5}}{\sqrt{n}}$ diverge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leqslant 1$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^{-r_n}}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

3.4 On a $\ln^3(n) \underset{n\to+\infty}{\ll} n$. Donc il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 < \ln^3(n) \leqslant n.$$

Par décroissance de la fonction inverse, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\ln^3(n)}.$$

Or la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge (en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\ln^3(n)} \text{ diverge.}}$$

3.5 Notons $d = \deg(P)$ (on suppose $P \neq 0$, sinon c'est trop facile) et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant (non nul car P est de degré *exactement* d). On a donc $|P(n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_d|\, n^d$. Donc par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{|P(n)|}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} |a_d|\, n^2\frac{n^d}{2^n} = 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \frac{|P(n)|}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{|P(n)|}{2^n} \text{ converge.}}$$

NB : on pouvait aussi utiliser que $\frac{|P(n)|}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\ll} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *et utiliser le fait que la série géométrique de raison* $\frac{2}{3} \in]0;1[$ *converge.*

4. **Convergence absolue.**

4.1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+(-1)^n}}$. Puisque $n^3 + (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$. Par passage à la puissance, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ donc par passage en valeur absolue,

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Or $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^{3/2}} > 0$. Donc par le théorème des équivalents de séries à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|u_n|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+(-1)^n}} \text{ converge.}}$$

4.2 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$. On a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

ATTENTION ! ! Il ne faut pas tomber dans le piège consistant à dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$ et que donc ces deux séries sont de même nature car $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de signe constant ! ! Il faut donc aller à l'ordre supérieur. On observe que

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{1}{2n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Or $-\left(u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} > 0$. Donc par le théorème des équivalents de séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\left(u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge. Or on admet/sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Donc par somme de deux séries convergentes, on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right) \text{ converge.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \text{ converge.}}$$

4.3 Cette série est faussement de signe variable car

$$\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique. Or $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$. Conclusion, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

4.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\left(\frac{1+i}{3}\right)^n\right| = \left(\left|\frac{1+i}{3}\right|\right)^n = \left(\frac{\sqrt{1+1}}{3}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3} \in [0;1[$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left(\frac{1+i}{3}\right)^n\right|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n \text{ converge.}}$$

4.5 Soit $\omega \in \mathbb{U}_{12}$ une racine douzième de l'unité. Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \left|\frac{1+\omega^n}{n^3}\right| \leqslant \frac{1+|\omega^n|}{n^3}.$$

Or $\omega \in \mathbb{U}_{12}$ donc $\omega \in \mathbb{U}$ i.e. $|\omega| = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \left|\frac{1+\omega^n}{n^3}\right| \leqslant \frac{2}{n^3}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 2$. Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{1+\omega^n}{n^3}\right|$ converge. Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1+\omega^n}{n^3}$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Donc

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1+\omega^n}{n^3} \text{ converge.}}$$

5. **Calcul et estimation.**

5.1 Pour tout $n \geqslant 2$, on a
$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}.$$
On écrit alors que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n} + \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1}.$$
En reconnaissant alors deux sommes télescopiques, on obtient pour tout $n \geqslant 2$,
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2(2-1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.\end{aligned}$$
Ainsi la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1} \text{ converge}}$ et de plus sa somme totale est donnée par
$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}.}$$

5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n} = \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2 \times 4^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{4}\right)^n.$$
Or les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{4}\right)^n$ convergent en tant que séries géométriques de raisons $\frac{\mathrm{e}}{4} \in \left]-1;1\right[$ et $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{4} \in \left]-1;1\right[$ respectivement. Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n} \text{ converge}}$. De plus sa somme totale est donnée par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(k)}{4^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{-1}}{4}}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(k)}{4^k} = \frac{2}{4-\mathrm{e}} + \frac{2}{4-\mathrm{e}^{-1}}.}$$

5.3 On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$
Donc, en reconnaissant une somme télescopique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$
Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{(n+1)!} \text{ converge}}$ et sa somme totale est donnée par
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1.}$$

5.4 Posons pour tout $t > 0$, $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$. La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t}t - \ln(t)}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$f'(t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln(t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t > \mathrm{e}\,.$$

Donc f est continue et strictement décroissante sur $[\mathrm{e}; +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Par le théorème de comparaison série-intégrale,

$$\int_3^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^n \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_{t=2}^{t=n} = \frac{\ln^2(n) - \ln^2(2)}{2}.$$

De même $\displaystyle\int_3^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2(3)}{2}$. Par conséquent

$$\frac{\ln^2(n+1) - \ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{\ln^2(n) - \ln^2(2)}{2} + \frac{\ln(2)}{2}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\ln^2(n+1) &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(\ln(n) + o(1)\right)^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln^2(n)\left(1 + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \ln^2(n)\left(1 + o(1)\right).
\end{aligned}$$

Donc $\ln^2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$. Ainsi,

$$\frac{\ln^2(n+1) - \ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

De même,

$$\frac{\ln^2(n) - \ln^2(2)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

Conclusion, par le théorème d'encadrement pour les équivalents,

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}.}$$

NB : puisque $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 3$, par le théorème de comparaison, nous aurions pu justifier en amont la nature divergente de la série.

5.5 Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, posons $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant n$, par le théorème de comparaison série-intégrale,

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_n^N f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_n^N f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^N \frac{1}{t^1+1}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_{t=n}^{t=N} = \arctan(N) - \arctan(n)\,.$$

De même $\displaystyle\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \arctan(N+1) - \arctan(n+1)$. Par conséquent

$$\arctan(N+1) - \arctan(n+1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2+1} \leqslant \arctan(N) - \arctan(n).$$

Donc par passage à la limite sur N, (on admet par l'énoncé que la série converge)

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$$

Or on rappelle que pour tout $u > 0$, $\arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} \leqslant \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puis,

$$\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \arctan\left(\frac{1}{n}\right).$$

Conclusion, par le théorème d'encadrement pour les équivalents,

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

NB : pour montrer que la série converge, il suffit de voir que $\frac{1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$.

5.6 Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, posons $f(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$. La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = \mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t} = (1-t)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Pour tout $t > 1$, $f'(t) \leqslant 0$. Donc f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Fixons également $N > n$. Par le théorème de comparaison série-intégrale

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_{n}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Posons pour tout $t \geqslant 0$, $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geqslant 0$, $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v'(t) = 1$. Donc par intégration par parties,

$$\int_n^N f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^N t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=n}^{t=N} + \int_n^N \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n\,\mathrm{e}^{-n} - N\,\mathrm{e}^{-N} + \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-N}.$$

De même $\displaystyle\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = (n+2)\,\mathrm{e}^{-(n+1)} - (N+2)\,\mathrm{e}^{-(N+1)}$. Par conséquent

$$(n+2)\,\mathrm{e}^{-(n+1)} - (N+2)\,\mathrm{e}^{-(N+1)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} k\,\mathrm{e}^{-k} \leqslant (n+1)\,\mathrm{e}^{-n} - (N+1)\,\mathrm{e}^{-(N+1)}$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} (N+2)\,\mathrm{e}^{-(N+1)} = \lim_{N\to+\infty} (N+1)\,\mathrm{e}^{-(N+1)} = 0$ par croissance comparée. Donc par passage à la limite sur N, (on admet que la série converge, ce qui se démontre facilement par la règle du n^2)

$$(n+2)\,\mathrm{e}^{-(n+1)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k} \leqslant (n+1)\,\mathrm{e}^{-n}.$$

Donc d'une part,

$$0 \leqslant \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k}}{n\,\mathrm{e}^{-n}} \leqslant 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(n\,\mathrm{e}^{-n}\right)$. D'autre part,

$$0 < \frac{(n+2)\,\mathrm{e}^{-(n+1)}}{n\,\mathrm{e}^{-n}} \leqslant \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k}}{n\,\mathrm{e}^{-n}}.$$

Donc

$$0 \leqslant \frac{n\,\mathrm{e}^{-n}}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k}} \leqslant \frac{n\,\mathrm{e}^{-n}}{(n+2)\,\mathrm{e}^{-(n+1)}} = \frac{n}{n+2}\,\mathrm{e} \leqslant \mathrm{e}\,.$$

Donc $\displaystyle n\,\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k}\right)$.

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(n\,\mathrm{e}^{-n}\right) \qquad \text{et} \qquad n\,\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k}\right)}$$

NB : puisque $n\,\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{n^2}$ *la série est bien convergente.*

6. **BONUS : ne sera pas à l'interrogation. Manipuler un grand $\mathcal{O}$.**

5.1 On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+12n-1}{-2n^2+4} = -\frac{5}{2}.$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente est une suite bornée. Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(v_n\right)}$. De même par passage à l'inverse, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\frac{2}{5}$ et est donc aussi bornée et donc on a également $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(u_n\right)}$.

Vous noterez que la relation être dominée peut être réflexive alors que ce n'est jamais le cas pour la relation être négligeable.

5.2 On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = \left|5\,(-1)^n + \cos\left(5n^3\right)\right| \leqslant 5+1 = 6.$$

Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(v_n\right)}$.

D'autre part par l'inégalité triangulaire inférieure,

$$\left|5\,(-1)^n + \cos\left(5n^3\right)\right| \geqslant \left|5\,(-1)^n\right| - \left|\cos\left(5n^3\right)\right| \geqslant \left|5\,(-1)^n\right| - 1 = 5-1 = 4.$$

Donc

$$0 \leqslant \left|\frac{v_n}{u_n}\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Donc $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(u_n\right)}$.

Le fait d'être « un grand $\mathcal{O}$ » de 1 i.e. être dominée par la suite constante égale à 1 est équivalent au fait d'être une suite bornée.

5.3 On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} n^3\left(\frac{-1}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right) = \lim_{n\to+\infty} -n+2 = -\infty.$$

Donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée et donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'est pas dominée par } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$. Cependant par passage à l'inverse,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Donc la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geqslant N}$ est bornée et donc $\boxed{v_n = \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(u_n\right)}$.

NB : dans tous les cas, si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(b_n\right)$ *alors* $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(b_n\right)$.

5.4 Nous n'avons pas assez d'informations pour savoir si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = 1$, alors on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ et pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Inversement on ne sait pas non plus si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = 1$, alors on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ et pourtant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dominée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5.5 On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et donc $v_n = u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ donc $\frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et donc $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)}$. A contrario, on a $\frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et et donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'est pas dominée par } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$.