Interrogation 28 d'entrainement
Représentation matricielle

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Préciser l'isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices. Quelle est la dimension de $\mathscr{L}(E, F)$?
   1.2 Enoncer la proposition donnant le vecteur image.
   1.3 Donner la matrice d'une composition.
   1.4 Enoncer la caractérisation des bases par la représentation matricielle.
   1.5 Enoncer la proposition donnant la représentation d'un vecteur dans une nouvelle base.
   1.6 Caractériser l'inversibilité d'une matrice.
   1.7 Il ne faut pas confondre ma rage de pastis avec...

   Révisions

   1.8 Enoncer le théorème fondamental de l'arithmétique.
   1.9 Caractériser les bijections sur les ensembles finis.
   1.10 Enoncer la formule de Poincaré. Cas de l'union disjointe ?
   1.11 A quel type de tirage correspond à p-uplet ? Un arrangement ? une combinaison ?
   1.12 Donner le nombre d'applications de E dans F. Combien sont injectives ? bijectives ?
   1.13 Donner la notation pour l'ensemble des parties d'un ensemble. Lorsque E est fini en donner son cardinal.
2. **Matrice d'une application linéaire.**
   2.1 On admet que $\mathscr{B} = (t \mapsto \mathrm{ch}(t), t \mapsto \mathrm{sh}(t), t \mapsto 3)$ forme une base de $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$. On pose $\varphi : E \to E$, $f \mapsto f' - f(0)$. On admet que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}$.
   2.2 On pose $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $M \mapsto M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
   2.3 On pose $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
   2.4 On pose $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto (\mathrm{Re}(x), \mathrm{Im}(x), \mathrm{Re}(y), \mathrm{Im}(y))$ où $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
   Même question lorsque $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   2.5 Déterminer la matrice de $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^T$ dans la base canonique.
   2.6 On pose $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[X]$, $(a, b, c, d) \mapsto (2a + b) X^2 + (a - 3b + c) X - 4c$ et $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(2)$. Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques.
3. **Matrice de passage.**
   3.1 Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $e_1 = (3, 1)$, $e_2 = (5, 2)$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ (dans ce sens).
   3.2 Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathscr{C} = (e_x, e_y)$ la base canonique et on pose $e_r = \cos(\theta) e_x + \sin(\theta) e_y$ et $e_\theta = -\sin(\theta) e_x + \cos(\theta) e_y$. On fixe $\theta = \frac{\pi}{4}$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_r, e_\theta)$ est une base et calculer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
   3.3 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\mathscr{B} = \left(1, X - 1, (X - 1)^2\right)$ et $\mathscr{C}$ la base canonique. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
   3.4 Dans $\mathbb{R}_1[X]$, on pose $\mathscr{B}_1 = (X + 1, X + 2)$ et $\mathscr{B}_2 = (2X + 1, 3X + 1)$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des bases et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.
   3.5 Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ une base de E. On pose $\mathscr{B}_1 = \left(\frac{e_1 + e_2}{2}, \frac{e_1 - e_2}{2}\right)$ ainsi que $\mathscr{B}_2 = (2e_1 - e_2, e_1 + 3e_2)$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases de E et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

4. **Formule de changement de base.**

4.1 Soient $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_4$ quatre bases et f une application linéaire. Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f)$ sachant que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&3\end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{B}_1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_4)=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_4}(\mathscr{B}_2)=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}.$$

4.2 On considère $f\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=(x-y+3z,2y+z)$. On pose $\mathscr{B}_3=((1,0,0),(-1,1,0),(1,-3,2))$, $\mathscr{B}_2=((-1,1),(5,-2))$, $\mathscr{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On donne $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{C}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{C}_2)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&5\\1&1\end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f)$.

4.3 Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et f un endomorphisme. Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sachant que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}5&-4&2\\14&-10&4\\16&-10&3\end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&1\\1&2&2\end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\3&-2&1\\-2&1&0\end{pmatrix}.$$

4.4 On pose $M=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé, $e_1=(0,1,0)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(1,0,-1)$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et en déduire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

4.5 Soient $M=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&1&0\\1&0&2&-1\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. On pose $e_1=(1,1,0,0)$, $e_2=(0,0,1,1)$, $e_3=(0,1,0,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Calculer $f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)$ et en déduire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

4.6 Soient $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. On pose $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,1,0)$ et $e_3=(-2,0,0)$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1),f(e_2),f(e_3)$ et en déduire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

5. **Noyau, image, rang.**

5.1 Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\1&3&2\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Calculer le noyau et le rang de f.

5.2 Soit $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$ et $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à A. Déterminer le noyau et le rang de $f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

5.3 Soient E un espace vectoriel, $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E et $f\in\mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}-2&0&3\\6&1&-6\\-6&0&7\end{pmatrix}$. Déterminer le noyau et le rang de $f-4\mathrm{Id}_E$.

5.4 Soient E un espace vectoriel, $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E et $f\in\mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}3&-3&6\\1&-1&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}$. Déterminer l'image et le rang de f.

5.5 Soient $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. Calculer l'image et le rang de f.

5.6 Soient $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&3&2\\1&7&3&6\\2&7&6&5\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ canoniquement associé. Calculer l'image et le rang de f.