Correction de l'interrogation 28 d'entrainement
Représentation matricielle

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E et F deux espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Alors, l'application

$$\Phi : \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$f \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f),$$

forme un isomorphisme. En particulier $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np$.

1.2 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $x \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x))$. Alors

$$Y = AX.$$

1.3 Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $\mathscr{B}_G$, une base de G, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

1.4 Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors,

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est une matrice inversible.}$$

1.5 Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E et $x \in E$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$. Alors

$$X = PX'.$$

1.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
- $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
- $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$
- $\mathrm{rg}(A) = n$.

1.7 ...avec matrice de passage bien sûr !! Pour les amateurs de contrepèterie, j'ai aussi trouvé le massage de Patrice ou en plus élaboré le pistage de sa rame (ou carrément de ma race) ou encore le traçage de ma hé ho ! Un peu de tenu, on va s'arrêter là.

2. **Matrice d'une application linéaire.**

2.1 On pose $e_1 : t \mapsto \mathrm{ch}(t)$, $e_2 : t \mapsto \mathrm{sh}(t)$ et $e_3 : t \mapsto 3$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= e_1' - e_1(0) = e_2 - 1 = e_2 - \frac{e_3}{3}\\
\varphi(e_2) &= e_2' - e_2(0) = e_1 = e_1\\
\varphi(e_3) &= e_3' - e_3(0) = -3 = -e_3.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

2.2 Soient $\mathscr{C}_1 = (E_1, E_2, E_3, E_4) = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}_2 = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$f(E_1) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad f(E_2) = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$f(E_3) = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \qquad f(E_4) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}.}$$

2.3 Posons $\mathscr{C}_1 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{C}_2 = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, on a

$$f(1) = (1,0,0) \qquad f(X) = (0,1,0) \qquad f(X^2) = (0,0,2) \qquad f(X^3) = (0,0,0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\end{pmatrix}.}$$

2.4 Lorsque $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel sa base canonique est donnée par $\mathscr{C}_2 = ((1,0),(0,1))$. Notons $\mathscr{C}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$f((1,0)) = (1,0,0,0) \qquad \text{et} \qquad f((0,1)) = (0,0,1,0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_2,\mathscr{C}_4}(f) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}.}$$

Lorsque $\mathbb{C}^2$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sa base canonique est alors donnée par

$$\mathscr{B} = ((1,0),(i,0),(0,1),(0,i)).$$

On a alors

$$f((1,0)) = (1,0,0,0) \qquad f((i,0)) = (0,1,0,0) \qquad f((0,1)) = (0,0,1,0) \qquad f((0,i)) = (0,0,0,1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}_4}(f) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = I_4.}$$

Autrement dit l'isomorphisme entre $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{R}^4$ est trivial.

2.5 Soit $\mathscr{C} = (E_1, E_2, E_3, E_4) = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a alors les calculs suivants :

$$f(E_1) = {E_1}^T = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = E_1 \qquad f(E_2) = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = E_3$$

$$f(E_3) = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = E_2 \qquad f(E_4) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = E_4$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2.6 Soit $\mathscr{C}_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\mathscr{C}_2 = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{C}_3 = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$. On a

$$f(e_1) = 2X^2 + X \qquad f(e_2) = X^2 - 3X \qquad f(e_3) = X - 4 \qquad f(e_4) = 0.$$

Donc

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$g(1) = 1 \qquad g(X) = 2 \qquad g\left(X^2\right) = 4.$$

Donc

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors par la formule de la matrice de la composition,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_3}(g \circ f) = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3}(g) \operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_3}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3. **Matrice de passage.**

3.1 Posons $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ alors

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{array}{lll} P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 & I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 & \quad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \quad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 & \quad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \quad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \quad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

N'oubliez pas de vérifier votre résultat en calculant PP^{-1}.

$P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_2$ donc P est inversible et donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$, de plus

$$\boxed{P_{\mathscr{B}, \mathscr{C}} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

3.2 Oh, le changement de coordonnées polaires ! Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, alors $e_r = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_x + e_y)$ et $e_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_x + e_y)$. Posons

$$P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
P &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 && I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} && L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 && I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 && I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} && \begin{matrix}L_1 \leftarrow \sqrt{2}L_1\\ L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2\end{matrix} && I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

N'oubliez pas de vérifier votre résultat en calculant PP^{-1}.

$P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_2$ donc P est inversible donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$. De plus,

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

Autre méthode. Les vecteurs e_r et e_θ ne sont pas colinéaires et $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus en notant

$$e_r = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_x + e_y) \tag{1}$$

$$e_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_x + e_y) \tag{2}$$

Alors en faisant (1) + (2), on a $e_r + e_\theta = \sqrt{2}e_y$ i.e. $e_y = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_r + e_\theta)$. De même en faisant (1) − (2), $e_r - e_\theta = \sqrt{2}e_x$ i.e. $e_x = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_r - e_\theta)$. Ainsi, on retrouve

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

3.3 Posons

$$P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On note que P est échelonnée avec des pivots à chaque ligne donc $\operatorname{rg}(P) = 3$ et donc P est inversible. Donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$. Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned}
P\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x - y + z = a\\ y - 2z = b\\ z = c\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x = a + y - z = a + b + 2c - c = a + b + c\\ y = b + 2z = b + 2c\\ z = c\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

N'oubliez pas de vérifier votre résultat en calculant PP^{-1}.

3.4 Les vecteurs $X+1$ et $X+2$ ne sont pas colinéaires et donc $\mathscr{B}_1$ est libre. Or $\text{Card}(\mathscr{B}_1) = 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$. Donc $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. De même $\mathscr{B}_2 = (2X+1, 3X+1)$ contient deux vecteurs non-colinéaires et donc est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. Ainsi $\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ et } \mathscr{B}_2 \text{ sont deux bases de } \mathbb{R}_1[X].}$

Méthode 1 : On cherche les coordonnées de $2X+1$ dans $\mathscr{B}_1$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
2X+1 = \lambda(X+1) + \mu(X+2) \quad &\Leftrightarrow \quad 2X+1 = (\lambda+\mu)X + (\lambda+2\mu) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ \lambda+2\mu = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda+\mu = 2 \\ \mu = -1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $2X+1 = 3(X+1) - (X+2)$. De même, on cherche les coordonnées de $3X+1$ dans $\mathscr{B}_1$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
3X+1 = \lambda(X+1) + \mu(X+2) \quad &\Leftrightarrow \quad 3X+1 = (\lambda+\mu)X + (\lambda+2\mu) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda+\mu = 3 \\ \lambda+2\mu = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda+\mu = 3 \\ \mu = -2 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $3X+1 = 5(X+1) - 2(X+2)$. Finalement

$$\boxed{P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \text{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

Méthode 2 : Soit $\mathscr{C} = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. On a alors

$$P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1} = \text{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_2} = \text{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Or $P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}} P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_2} = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1} P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_2}$. Calculons $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1}$. Par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{aligned}
P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1} &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 & \qquad I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 & \qquad I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \qquad I_2 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

N'oubliez pas de vérifier votre résultat en calculant $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1} P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1}$. Donc $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\boxed{P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1} P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

3.5 On note $u_1 = \frac{e_1+e_2}{2}$, $u_2 = \frac{e_1-e_2}{2}$, $v_1 = 2e_1 - e_2$ et $v_2 = e_1 + 3e_2$.
Méthode 1 : Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires car (e_1, e_2) forme une famille libre. Donc $\mathscr{B}_1$ est libre. De plus $\text{Card}(\mathscr{B}_1) = 2 = \text{Card}(e_1, e_2) = \dim(E)$. Donc $\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } E}$. De même

$\boxed{\mathscr{B}_2 \text{ est une base de } E}$. Cherchons les coordonnées de v_1 dans $\mathscr{B}_1$. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
v_1=\lambda u_1+\mu u_2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2e_1-e_2=\lambda\frac{e_1+e_2}{2}+\mu\frac{e_1-e_2}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad 2e_1-e_2=\frac{\lambda+\mu}{2}e_1+\frac{\lambda-\mu}{2}e_2\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}2=\frac{\lambda+\mu}{2}\\ -1=\frac{\lambda-\mu}{2}\end{cases} \qquad \text{car } \mathscr{C} \text{ est une famille libre}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda=2-1=1\\ \mu=2-(-1)=3.\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $v_1=u_1+3u_2$. De même, soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
v_2=\lambda u_1+\mu u_2 \quad &\Leftrightarrow \quad e_1+3e_2=\lambda\frac{e_1+e_2}{2}+\mu\frac{e_1-e_2}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad e_1+3e_2=\frac{\lambda+\mu}{2}e_1+\frac{\lambda-\mu}{2}e_2\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}1=\frac{\lambda+\mu}{2}\\ 3=\frac{\lambda-\mu}{2}\end{cases} \qquad \text{car } \mathscr{C} \text{ est une famille libre}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda=1+3=4\\ \mu=1-3=-2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $v_2=4u_1-2u_2$. Conclusion,

$$\boxed{P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}=\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}.}$$

Méthode 2 : On a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_2)=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}.$$

Les colonnes de $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_1)$ ne sont pas colinéaires donc $\operatorname{rg}(\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_1))=2$ et donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_1)$ est inversible et donc $\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } E}$. De même $\boxed{\mathscr{B}_2 \text{ est une base de } E}$. De plus,

$$\begin{array}{lll}
P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}\underset{\mathscr{L}}{\sim}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\end{pmatrix} & L_2\leftarrow L_2-L_1 & I_2\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} & L_1\leftarrow 2L_1 & I_2\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & L_1\leftarrow L_1+L_2 & I_2\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & L_2\leftarrow -L_2 & I_2\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.
\end{array}$$

N'oubliez pas de vérifier votre résultat en calculant $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1}$.

Ainsi, $P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}=P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}}P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_2}=P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_1}^{-1}P_{\mathscr{C},\mathscr{B}_2}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\end{pmatrix}.}$$

4. **Formule de changement de base.**

4.1 Posons $A=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)$ (l'ancienne matrice) et $D=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f)$ (la nouvelle, celle que l'on cherche). Posons $P=P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_4}=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_4)$ (matrice de passage à l'arrivée) et $Q=P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_3)$ (matrice de passage au départ). Alors,

$$D=P^{-1}AQ.$$

Or

$$P^{-1}=P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_4}^{-1}=P_{\mathscr{B}_4,\mathscr{B}_2}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & -21 & -22 \\ 10 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f) = \begin{pmatrix} -25 & -21 & -22 \\ 10 & 9 & 9 \end{pmatrix}.}$$

4.2 Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3,\mathscr{C}_2}(f)$ (la vieille matrice), $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f)$ (la nouvelle matrice), $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_2}(\mathscr{B}_2)$ (matrice de passage à l'arrivée) et $Q = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_3}(\mathscr{B}_3)$ (matrice de passage au départ). On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{C}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) = P^{-1}AQ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.}$$

4.3 Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ (ancienne matrice), $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ (nouvelle matrice) et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ (matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base). On a

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

4.4 Puisque f est l'application canoniquement associée à M dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$f(e_1) = Me_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$$
$$f(e_2) = Me_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3e_2$$
$$f(e_3) = Me_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4.5 Puisque f est l'application canoniquement associée à M dans $\mathbb{R}^4$, on a

$$f(e_1) = Me_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1 + e_2$$
$$f(e_2) = Me_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e_1 + e_2$$
$$f(e_3) = Me_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2e_3$$
$$f(e_4) = Me_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e_3 - e_4.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

4.6 Puisque f est l'application canoniquement associée à M dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$f(e_1) = Me_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2$$
$$f(e_2) = Me_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2$$
$$f(e_3) = Me_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

5. **Noyau, image, rang.**

5.1 Comme f est canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}^3$, alors

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x+z \\ x+3y+2z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -2y-z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} && \text{car } L_2 = -L_3 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y-z = -y+2y = y \\ z = -2y \end{cases} .
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right).}$$

On pense à vérifier que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$. Le vecteur $(1, 1, -2)$ est non nul donc forme une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Donc $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$. Par le théorème du rang,

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.}$$

Bonus ! Calculons $Im(f)$*. On sait que* $\dim(Im(A)) = 2$*. Donc il suffit de prendre deux colonnes non colinéaires de* A *pour former une famille libre de cardinal* 2 *et donc une base de* $Im(A)$*. Par exemple les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires :*

$$Im(A) = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, donc on peut aussi donner

$$Im(A) = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \qquad C_2 \leftarrow -\frac{C_2 - C_1}{2}.$$

Or f *est l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à* A*. Conclusion,*

$$\boxed{Im(f) = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).}$$

5.2 Soit B la matrice canoniquement associée à $f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$. On a

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(B) \quad &\Leftrightarrow \quad BX = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 3x-3y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases} \qquad L_3 = -\frac{2}{3}L_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=-x+2y=-y+2y=y \\ x=y \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Ker}(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

On pense bien à vérifier que $B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$. Par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = \operatorname{Vect}\left(1+X+X^2\right).}$$

Attention, $Ker\left(f-Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right) \neq Ker(A-I_3)$.

Le polynôme $1+X+X^2$ est non nul, donc forme une base de $\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$. Donc par le théorème du rang,

$$\boxed{\operatorname{rg}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim\left(\operatorname{Ker}\left(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)\right) = 3-1=2.}$$

Bonus ! Calculons $Im\left(f-Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$. *On sait que* $\dim(Im(B)) = rg(B) = rg\left(f-Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = 2$. *Donc il suffit de prendre deux colonnes non colinéaires de* B *pour former une famille libre de cardinal* 2 *et donc une base de* $Im(B)$. *Par exemple les colonnes* 1 *et* 3 *ne sont pas colinéaires :*

$$Im(B) = Vect\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, donc

$$\begin{aligned} Im(B) &= Vect\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) \qquad C_1 \leftrightarrow -C_2. \end{aligned}$$

Or $f-Id_{\mathbb{R}_2[X]}$ *est l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *canoniquement associé à* B. *Conclusion,*

$$\boxed{Im\left(f-Id_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = Vect\left(1, 3X-2X^2\right).}$$

5.3 Posons $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f-4\operatorname{Id}_E)$. On a

$$B = A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -6 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 4I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & -6 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}X\in \mathrm{Ker}\,(B) \quad &\Leftrightarrow \quad BX=0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+3z=0\\6x-3y-6z=0\\-6x+3z=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-6x+3z=0\\6x-3y-6z=0\end{cases} \qquad L_3=L_1\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}z=2x\\y=2x-2z=2x-4x=-2x\end{cases}.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Ker}\,(B)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right).$$

On pense bien à vérifier que $B\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}$.

Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f-4\mathrm{Id}_E)=\mathrm{Vect}\,(e_1-2e_2+2e_3)\,.}$$

Attention, $Ker\,(f-4Id_E)\neq Ker\,(A-4I_3)$ si $E\neq\mathbb{R}^3$ ou si $\mathscr{B}$ n'est pas la base canonique.

Le vecteur $e_1-2e_2+2e_3$ est non nul car (e_1,e_2,e_3) est libre donc $(e_1-2e_2+2e_3)$ forme une base de $\mathrm{Ker}\,(f-4\mathrm{Id}_E)$ donc par le théorème du rang,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(f-4\mathrm{Id}_E)=\dim\,(E)-\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f-4\mathrm{Id}_E))=\mathrm{Card}\,(E)-1=3-1=2.}$$

Bonus ! Calculons $Im\,(f-4Id_E)$. On sait que $\dim\,(Im\,(B))=rg\,(B)=rg\,(f-4Id_E)=2$. Donc il suffit de prendre deux colonnes non colinéaires de B pour former une famille libre de cardinal 2 et donc une base de $Im\,(B)$. Par exemple les colonnes 1 et 2 ne sont pas colinéaires :

$$Im\,(B)=Vect\left(\begin{bmatrix}-6\\6\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-3\\0\end{bmatrix}\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, donc

$$\begin{aligned}Im\,(B)&=Vect\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{matrix}C_1\leftarrow-\frac{C_1}{6}\\C_2\leftarrow-\frac{C_2}{3}\end{matrix}\\ &=Vect\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) \qquad C_1\leftarrow C_1+C_2.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{Im\,(f-4Id_E)=Vect\,(e_1+e_3,e_2)\,.}$$

5.4 Posons $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}3&-3&6\\1&-1&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{Im}\,(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\2\\-2\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}\right) \qquad \text{car } C_2=-C_1 \text{ et } C_3=2C_1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Vect}\,(3e_1+e_2-e_3)\,.}$$

Attention, $Im(f) \neq Im(A)$ si $E \neq \mathbb{R}^3$ ou si $\mathscr{B}$ n'est pas la base canonique.
Or $3e_1 + e_2 - e_3 \neq 0_E$ car $\mathscr{B}$ est libre donc $3e_1 + e_2 - e_3$ forme une base de $\operatorname{Im}(f)$. Donc

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = 1.}$$

Bonus ! Calculons $Ker(f)$. On sait par le théorème du rang que $\dim(Ker(A)) = \dim(\mathbb{R}^3) - rg(A) = 3 - 1 = 2$. Donc il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires de $Ker(A)$ pour former une famille libre de cardinal 2 et donc une base de $Ker(A)$. On observe que les colonnes de A vérifient $C_2 = -C_1$ i.e. $C_1 + C_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $C_3 = 2C_1$ i.e. $2C_1 - C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Par conséquent, les vecteurs $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $Ker(A)$. Ainsi,

$$Ker(A) = Vect\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, donc

$$Ker(A) = Vect\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right) \qquad C_2 \leftarrow -(C_2 - 2C_1)\ .$$

Conclusion,

$$\boxed{Ker(f) = Vect(e_1 + e_2, 2e_2 + e_3).}$$

5.5 Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. On a donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}\right) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_3 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-3\\3\end{bmatrix}\right) && \begin{matrix}C_2 \leftarrow C_2 - C_1\\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1\end{matrix} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-3\end{bmatrix}\right) && C_3 = -C_2 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) && \begin{matrix}C_1 \leftarrow -C_1\\ C_2 \leftarrow \frac{1}{3}C_2\end{matrix}\ .
\end{aligned}$$

Les deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de $\operatorname{Im}(f)$. Alors,

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)}$$

et

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2.}$$

Bonus ! Calculons $Ker(f)$. On sait par le théorème du rang que $\dim(Ker(A)) = \dim(\mathbb{R}^3) - rg(A) = 3 - 2 = 1$. Donc il suffit de trouver un vecteur non nul de $Ker(A)$ pour former une famille libre de cardinal 1 et donc une base de $Ker(A)$. On observe que les colonnes de A vérifient $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Par conséquent, le vecteur $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur non nul de $Ker(A)$. Ainsi,

$$Ker(A) = Vect\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

Or f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Conclusion,

$$\boxed{Ker(f) = Vect\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).}$$

5.6 Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(A) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\7\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\6\\5\end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\5\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\5\\3\end{bmatrix}\right) && \begin{matrix}C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1\\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1\\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1\end{matrix} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\5\\3\end{bmatrix}\right) && C_4 = C_2 \ .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}\right).}$$

Les deux matrices n'étant pas colinéaires forment une famille libre et donc une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = 2.}$$

Bonus ! Calculons $Ker(f)$. On sait par le théorème du rang que $\dim\left(Ker(A)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) - rg(A) = 4 - 2 = 2$. Donc il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires de $Ker(A)$ pour former une famille libre de cardinal 2 et donc une base de $Ker(A)$. On observe que les colonnes de A vérifient $C_3 = 3C_1$ i.e. $3C_1 - C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ et (un peu plus dur) $C_2 - C_4 = C_1$ i.e. $C_1 - C_2 + C_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Par conséquent, les vecteurs $\begin{bmatrix}3\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $Ker(A)$. Ainsi,

$$Ker(A) = Vect\left(\begin{bmatrix}3\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{Ker(f) = Vect\left(\begin{pmatrix}3 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\right).}$$