Interrogation 29 d'entrainement
Révisions I

1. **Restituer le cours.** *Source : Int3.1*
   1.1 Définir une fonction injective, surjective, bijective.
   1.2 Enoncer le théorème de la bijection (version 2).
   1.3 Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
   1.4 Définir la négligeabilité entre deux fonctions.

   Restituer le cours. *Source : Int12.1*

   1.5 Donner la définition de la borne inférieure, supérieure d'une partie.
   1.6 Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
   1.7 Donner la définition d'un intervalle.
   1.8 Définir la partie entière.
   1.9 Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   1.10 Donner la caractérisation de l'inversibilité (et non la définition : cf théorème II.4)
   1.11 Enoncer la formule de Bernoulli et du binôme de Newton pour deux matrices.
   1.12 Enoncer la proposition donnant l'inverse du produit.

2. **Primitivation, dérivation, Taylor.** *Source : 4.14*
   2.1 Par primitivation, déterminer le développement limité de la fonction arcsin en 0 à l'ordre 5.
   2.2 Par dérivation, retrouver le développement limité de $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ en 0 à l'ordre n.
   2.3 A l'aide de la formule de Taylor, déterminer le développement limité de ch en 1 à l'ordre $2n$.
   2.4 Par primitivation, déterminer le développement limité de $f : t \mapsto (1+t)\ln(1+t) - t$ en 0 à l'ordre 6.
   2.5 Donner le développement limité en 0 à l'ordre 9 de $f : x \mapsto x^2 \arctan(x)$. En déduire celui de $g : x \mapsto 2x \arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 8.

3. **Savoir faire un changement d'indice.** *Source : 6.3*
   3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2n - 4 + k)$. *Mettre le résultat sous forme de factoriels.*
   3.2 Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{100} \left(\sqrt{102-k} - \sqrt{k}\right)$.
   3.3 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+p}{k} = \sum_{k=p}^{n+p} \binom{n+p}{k}$.
   3.4 Soit $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, $p \geqslant m+1$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{p-m} \mathrm{e}^{\pi(n+m)^2} - \sum_{k=m}^{p-1} \mathrm{e}^{\pi k^2}$.
   3.5 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p \geqslant 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} [\sin(k+p) - \sin(k)] = \sum_{k=0}^{p-1} [\sin(k+n+1) - \sin(k)]$.
   Séparer la somme en deux et commencer par imiter la démonstration du calcul de la somme télescopique.

4. **Formule des probabilités totales.** *Source : 27.3*

   4.1 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 40% préfère le rugby et 15% le basket. Parmi ceux qui aiment le rugby, 10% le pratique. Parmi ceux qui aiment le basket, 85% le pratique et parmi ceux qui aiment le foot, 90% n'y jouent pas. Sachant qu'un individu pratique au plus un sport et que ce sport, s'il est pratiqué, est nécessairement celui qu'il préfère, quelle est la probabilité qu'un individu pratique l'un de ces trois sports ?

   4.2 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 20% choisissent le foot et 25% choisissent le basket. Parmi ceux qui préfèrent le foot, 15% aiment les maths. Parmi ceux qui préfèrent le rugby, 55% aiment les maths et enfin parmi ceux qui préfèrent le basket, 45% n'aiment pas les maths. Sachant qu'un individu aime les maths, quelle est la probabilité qu'il préfère le rugby ?

   4.3 Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules bleues et 5 boules vertes. On tire de façon équiprobable une boule. Si la boule est rouge on lance un dé à 4 faces (tétraèdre) si la boule est bleue, on lance un dé à six face (un cube) et si la boule est verte on lance un dé à 8 faces (octaèdre). Quelle est la probabilité que le résultat du dé soit 4 ?

   4.4 On demande aux individus d'une population de choisir entre le foot, le rugby et le basket. 60% des individus préfèrent le rugby et 10% préfère le basket. Parmi ceux qui choisissent le rugby, 40% n'aiment pas les maths. Parmi ceux qui choisissent le basket, 85% aiment les maths et enfin parmi ceux qui préfèrent le foot, 25% n'aiment pas les maths. Quelle est la probabilité qu'un individu aime les maths ?

   4.5 On tire une carte dans un jeu de 52 carte. Si l'on obtient un pique, on lance un dé à 8 faces (octaèdre), si l'on obtient un roi (sauf le roi de pique), on lance un dé à 12 faces (dodécaèdre), sinon, on lance un dé à 20 faces (icosaèdre). Quelle est la probabilité d'avoir tiré un pique sachant que le résultat du dé est égal à 1 ?

5. **Savoir calculer les puissances d'une matrice.** *Source : 13.3*

   5.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A(\theta)^p$.

   5.2 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

   5.3 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

   5.4 Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = B$. On pose $A = 2I_n - B$, calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

   5.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.