

Correction de l'interrogation 2 d'entraînement Fonctions réelles

1. Restituer le cours.

1.1 Soient $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq \mathbb{R}$.

- L'image directe de A par f est

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

- L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in U \mid f(x) \in B\}.$$

1.2 À partir du graphe de f , on obtient le graphe de

- g_1 par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- g_2 par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- g_3 par une dilatation/contraction verticale de coefficient a .
- g_4 par une dilatation/contraction horizontale de coefficient $\frac{1}{a}$.

1.3 Soient $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est majorée sur } U &\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) \leq M \\ f \text{ est minorée sur } U &\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in U, m \leq f(x) \\ f \text{ est bornée sur } U &\Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in U, m \leq f(x) \leq M \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in U, |f(x)| \leq M. \end{aligned}$$

1.4 Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a , $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On a

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

1.5 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$. Si f est continue sur $[a; b]$ alors,

$$\forall \lambda \in [f(a); f(b)], (\text{ ou } [f(b); f(a)]), \exists c \in [a; b], f(c) = \lambda.$$

1.6 Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a , $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On a

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

En particulier

$$(f \text{ dérivable en } a) \Rightarrow (f \text{ continue en } a).$$

2. Déterminer l'ensemble de définition et la parité d'une fonction.

2.1 Soit $f : x \mapsto \frac{2 \ln(x^2 - 5)}{\tan(3x)}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et \mathcal{D}_f l'ensemble de définition de f . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ \forall k \in \mathbb{Z}, 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan(3x) \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 5 \\ \forall k \in \mathbb{Z}, 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \forall k \in \mathbb{Z}, 3x \neq k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{5} & \text{OU} & x < -\sqrt{5} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, 3x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{5} & \text{OU} & x < -\sqrt{5} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\frac{\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble de définition de f est

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[\setminus \left\{ k\frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(i) On note que \mathcal{D}_f est centré en 0.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2 \ln((-x)^2 - 5)}{\tan(3(-x))} = \frac{2 \ln(x^2 - 5)}{-\tan(3x)} && \text{car la fonction tangente est impaire.} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

la fonction f est impaire.

2.2 Soit $f : x \mapsto \frac{7x^3 - 3x + 1}{x^4 + x^2 + 1}$. Soit Δ le discriminant de $X^2 + X + 1$. On a $\Delta = 1 - 4 < 0$. Donc pour tout $u \in \mathbb{R}$, $u^2 + u + 1 > 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, (en prenant $u = x^2$), on a $x^4 + x^2 + 1 > 0$. Par conséquent la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

(i) On note que \mathbb{R} est bien centré en 0.

(ii) Cependant on a $f(1) = \frac{7-3+1}{1+1+1} = \frac{5}{3}$ et $f(-1) = \frac{-7+3+1}{1+1+1} = -1$. Donc $f(-1) \neq -f(1)$ et la fonction f n'est pas impaire et $f(-1) \neq f(1)$ donc la fonction f n'est pas paire.

Conclusion,

la fonction f n'est ni paire ni impaire.

2.3 Soit $f : x \mapsto \frac{e^{3x^3+1} + e^{-3x^3+1}}{\sin(2x)}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et \mathcal{D}_f l'ensemble de définition de f . On a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \sin(2x) \neq 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, 2x \neq k\pi \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(i) On note que \mathcal{D}_f est centré en 0.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{3(-x)^3+1} + e^{-3(-x)^3+1}}{\sin(-2x)} = \frac{e^{-3x^3+1} + e^{3x^3+1}}{-\sin(2x)} && \text{car la fonction sinus est impaire} \\ &= -\frac{e^{3x^3+1} + e^{-3x^3+1}}{\sin(2x)} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

la fonction f est impaire.

2.4 Soit $f : x \mapsto \frac{3|x|^3 + \cos(6x)}{\cos(2x)}$. Soit \mathcal{D}_f l'ensemble de définition de f . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \cos(2x) \neq 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(i) On note que \mathcal{D}_f est centré en 0.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(-x) = \frac{3|-x|^3 + \cos(-6x)}{\cos(-2x)} = \frac{3|x|^3 + \cos(6x)}{\cos(2x)} \quad \text{car la fonction cosinus est paire}$$

$$= f(x).$$

Conclusion,

la fonction f est paire.

2.5 Soit $f : x \mapsto \ln(|x+2| - (x+3))$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et \mathcal{D}_f l'ensemble de définition de f . On a

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow |x+2| - (x+3) > 0 \Leftrightarrow |x+2| > x+3.$$

Premier cas, $x \geq -2$, alors

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x+2 > x+3 \Leftrightarrow 2 > 3 \quad \text{impossible.}$$

Second cas, $x \leq -2$, alors

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow -x-2 > x+3 \Leftrightarrow -5 > 2x \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}.$$

Or $-\frac{5}{2} < -2$.

Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right[.$$

On note que \mathcal{D}_f n'est pas centré en 0 (pire ne contient aucun réel positif) il n'y a donc aucune chance que f soit paire ou impaire. Conclusion,

la fonction f n'est ni paire ni impaire.

3. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection.

3.1 Pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on pose $f(x) = \sin(4x) + 5x^2$.

(i) La fonction f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ en tant que somme de fonctions continues.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = 0 < 2$ et si $x = \frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi) + 5\frac{\pi^2}{4} = 5\frac{\pi^2}{4} > 5\frac{3^2}{4} > 5\frac{2^2}{4} = 5 > 2$. Donc $2 \in [f(0); f(\frac{\pi}{2})]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $f(c) = 2$.

Conclusion, l'équation $\sin(4x) + 5x^2 = 2$ admet (au moins) une solution sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

3.2 Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on pose $f(x) = \left(\frac{1}{5\sqrt{x+3}}\right)^2$ (bien défini car $x \geq 0$ et $5\sqrt{x+3} + 3 \geq 3 > 0$).

(i) La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = \frac{1}{9} > \frac{1}{10}$ et si $x = 1$ (par exemple), $f(1) = \frac{1}{64} < \frac{1}{10}$. Donc $\frac{1}{10} \in [f(1); f(0)]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; 1] \subseteq [0; +\infty[$ tel que $f(c) = \frac{1}{10}$.

Conclusion, l'équation $\left(\frac{1}{5\sqrt{x+3}}\right)^2 = \frac{1}{10}$ admet (au moins) une solution sur $[0; +\infty[$.

3.3 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on pose $f(x) = 4 \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

(i) La fonction f est continue sur $[0; \pi[$ en tant que composée de fonctions continues.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = 0 < 2019$ et si $x \rightarrow \pi$, $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} f(x) = +\infty$. Donc il existe $x_0 \in [0; \pi[$ tel que pour tout $x \in [x_0; \pi[$, $f(x) \geq 2019$, notamment si $x = x_0$, $f(x_0) \geq 2019$ (attention nous n'avons pas montré que $f(x_0) = 2019$ faites bien la distinction). Ainsi $2019 \in [f(0); f(x_0)]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; x_0] \subseteq [0; \pi[\subseteq [0; +\infty[$ tel que $f(c) = 2019$.

Conclusion, l'équation $4 \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2019$ admet (au moins) une solution sur $[0; +\infty[$.

En réalité cette équation va admettre une infinité de solutions sur $[0; +\infty[$ par la π -périodicité de la fonction tangente mais une seule sur $[0; \pi[$ en appliquant le théorème de la bijection.

3.4 L'unicité demandée réclame le théorème de la bijection et non juste le théorème des valeurs intermédiaires. Pour tout $x \in [3; +\infty[$, on pose $f(x) = \frac{e^x}{x^2-1}$ qui est bien défini car pour tout $x \geq 3$, $x^2-1 \geq 8 > 0$. De plus la fonction f est dérivable sur $[3; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in [3; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{e^x(x^2-1) - e^x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-1)}{(x^2-1)^2}$$

Soit Δ le discriminant de $X^2 - 2X - 1$, $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$, donc les solutions réelles de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}$$

Or $x_1 < x_2 < \frac{2+3}{2} < 3$. Donc pour tout $x \in [3; +\infty[$, $x^2 - 2x - 1 > 0$ et par suite,

$$\forall x \in [3; +\infty[, \quad f'(x) > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$. De plus $f(3) = \frac{e^3}{8}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	3	$+\infty$
f	$\frac{e^3}{8}$	$+\infty$

(i) La fonction f est continue sur $[3; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(ii) Si $x = 3$, $f(3) = \frac{e^3}{8} < \frac{3^3}{8} = \frac{27}{8} < 4$ donc $4 \in \left[\frac{e^3}{8}; +\infty\right[= [f(3); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$.

(iii) La fonction f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$

Donc par le théorème de la bijection, il existe un unique $c \in [3; +\infty[$ tel que $f(c) = 4$.

Conclusion, l'équation $\frac{e^x}{x^2-1} = 4$ admet une unique solution sur $[3; +\infty[$.

3.5 Pour tout $x > 0$, on pose $u(x) = x - \ln(x)$. La fonction u est bien définie, continue et même dérivable sur \mathbb{R}_+^* . De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Donc pour tout $x \in]0; 1[$, $u'(x) < 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $u'(x) > 0$ et la fonction u est donc strictement décroissante sur $]0; 1[$ et strictement croissante sur $]1; +\infty[$. De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u(x) = +\infty$, $u(1) = 1$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)}_{\rightarrow 0} = +\infty$. Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
u	$+\infty$		$+\infty$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x) \geq 1 > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \quad x > \ln(x).}$$

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$. Par ce qui précède, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x - \ln(x) \neq 0$ donc f est bien définie sur $]0; +\infty[$ et est même continue et dérivable sur cet ensemble et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln(x)) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{x - \ln(x) - \ln(x)(x - 1)}{x(x - \ln(x))^2} = \frac{x - x \ln(x)}{x(x - \ln(x))^2} = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}.$$

Or pour tout $x \in [1; e]$, on a $\ln(x) \in [0; 1]$ donc $1 - \ln(x) < 0$ et donc $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[1; e]$. De plus, $f(1) = \frac{\ln(1)}{1 - \ln(1)} = 0$ et $f(e) = \frac{\ln(e)}{e - \ln(e)} = \frac{1}{e - 1}$. On a donc

x	1	e
f	0	$\frac{1}{e - 1}$

Or $e > 2$ donc $e - 1 > 1 > 0$ et par stricte décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* , $\frac{1}{e - 1} < 1$.

On a donc les points suivants :

- $f(1) = 0 < 1$, $f(e) = \frac{1}{e - 1} < 1$,
- f est continue sur $[1; e]$,
- f est strictement décroissante sur $[1; e]$.

Donc par le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), on en déduit que

$$\exists! \alpha \in [1; e], \quad f(\alpha) = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists! x \in [1; e], \quad \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)} = 1.}$$

4. Tableau de variations.

4.1 La fonction f est définie et même dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = x(x + 2)e^x.$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f						

Or,

$$f(-2) = 4e^{-2}, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = +\infty.$$

Et, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$. Conclusion,

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f	0	$4e^{-2}$	0	$+\infty$

4.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x}{\ln(x)} \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Donc f est bien définie sur $U =]0; 1[\cup]1; +\infty[$. De plus f est dérivable sur U comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in U, \quad f'(x) = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}.$$

Dès lors, pour $x \in U$,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e.$$

On obtient donc le tableau :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
f				

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$. Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\ln(x)} = 0.$$

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(x) = 0^-$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{\ln(x)} = 1 \times -\infty = -\infty.$$

De même,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{\ln(x)} = 1 \times +\infty = +\infty.$$

Puis, $f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = e$. Finalement, par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty.$$

Conclusion,

x	0	1	e	$+\infty$
f	0	$+\infty$	e	$+\infty$

4.3 La fonction f est définie et même dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2).$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 + x - 2$. On a $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$. Ainsi, les racines associées sont $r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = x(x-1)(x+2).$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$f'(x)$	-	0	0	0	+
f					

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{4} \left(1 + \frac{4}{3x} - \frac{4}{x^2} + \frac{20}{x^4} \right) = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{4} \left(1 + \frac{4}{3x} - \frac{4}{x^2} + \frac{20}{x^4} \right) = +\infty.$$

Mais aussi,

$$f(-2) = \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 + 5 = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 + 5 = \frac{3+4}{12} + 4 = \frac{1+48}{12} = \frac{49}{12}$$

Conclusion,

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
f	$+\infty$	$\frac{7}{3}$	5	$\frac{49}{12}$	$+\infty$

4.4 La fonction f est définie et même dérivable sur \mathbb{R} donc notamment sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad f'(x) &= 3(-\sin(x)) \cos^2(x) \sin^3(x) + 3 \cos(x) \sin^2(x) \cos^3(x) \\ &= -3 \cos^2(x) \sin^4(x) + 3 \cos^4(x) \sin^2(x) = 3 \cos^2(x) \sin^2(x) (-\sin^2(x) + \cos^2(x)) \\ &= 3 \cos^2(x) \sin^2(x) (\cos(x) - \sin(x)) (\cos(x) + \sin(x)). \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$, $\sin(x) \geq 0$. Donc pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) - \sin(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) \geq \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Le cosinus étant l'abscisse et le sinus l'ordonnée, l'égalité $\cos(x) = \sin(x)$ se situe sur la droite d'équation $y = x$.

Ainsi,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$f'(x)$		+	0	-
f				

Or $f(0) = \cos^3(0) \sin^3(0) = 1 \times 0 = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0 \times 1 = 0$ et $f(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Conclusion,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$f'(x)$		+	0	-
f	0	$\frac{1}{8}$	0	

4.5 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x - 3} \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 \neq 0.$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 - 2x - 3$. On a $\Delta = 4 - 4 \times (-3) = 4(1 + 3) = 4^2$. Ainsi, les racines associées sont $\frac{2-4}{2} = -1$ et $\frac{2+4}{2} = 3$. Donc sur \mathbb{R}_+ , la fonction f est définie sur

$$U = [0; 3[\cup]3; +\infty[$$

et

$$\forall x \in U, \quad f(x) = \frac{x^2 + 3}{(x + 1)(x - 3)}.$$

La fonction f est dérivable sur son domaine de définition en tant que quotient de fonctions qui le sont et

dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in U, \quad f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 2x - 3) - (x^2 + 3)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 6}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 12x + 6}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= -2 \frac{x^2 + 6x - 3}{(x^2 - 2x - 3)^2}. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 + 6x - 3$. On a $\Delta = 36 + 12 = 48 = 4 \times 12 = 4^2 \times 3$. Les racines associées sont donc $r_1 = \frac{-6+4\sqrt{3}}{2} = -3 + 2\sqrt{3}$ et $r_2 = -3 - 2\sqrt{3}$.

$$\forall x \in U, \quad f'(x) = -2 \frac{(x - 2\sqrt{3} + 3)(x + 2\sqrt{3} + 3)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

On note que $r_2 < 0$ et puisque $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12 \in]9; 16[$, on a $2\sqrt{3} \in]3; 4[$, on a donc $r_1 \in]0; 1[\subseteq]0; 3[$. D'où

x	0	$2\sqrt{3} - 3$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
f	↗ ↘		↘	

Or $f(0) = \frac{3}{-3} = -1$,

$$\begin{aligned} f(2\sqrt{3} - 3) &= \frac{(2\sqrt{3} - 3)^2 + 3}{(2\sqrt{3} - 3)^2 - 2(2\sqrt{3} - 3) - 3} \\ &= \frac{12 - 12\sqrt{3} + 9 + 3}{12 - 12\sqrt{3} + 9 - 4\sqrt{3} + 6 - 3} \\ &= \frac{24 - 12\sqrt{3}}{24 - 16\sqrt{3}} \\ &= \frac{12(2 - \sqrt{3})}{8(3 - 2\sqrt{3})} \\ &= \frac{3(2 - \sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3})}{2(9 - 12)} \\ &= \frac{3(6 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6)}{-6} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x^2 + 3}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{12}{4 \times 0^-} = -\infty, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 + 3}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{12}{4 \times 0^+} = +\infty. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 1.$$

Conclusion,

x	0	$2\sqrt{3} - 3$	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
f	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\infty$	1

5. Dérivée n -ième.

5.1 La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

On observe alors que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

La fonction f est trois fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

La fonction f est quatre fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } f \text{ est } n\text{-fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)}{x^n} \text{ »}.$$

On rappelle/donne la notation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = 1 \times 2 \times \dots \times n \quad \text{et} \quad 0! = 1.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : \text{« } f \text{ est } n\text{-fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \text{ »}.$
Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 1$, on a f dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} = (-1)^2 \frac{0!}{x} = \frac{1}{x}.$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n) : f$ est n -fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* puisque son dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^* . Donc f est $(n+1)$ -fois dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left((-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right)' = -n (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^{n+1}} = (-1)^{n+2} \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie : f est n -fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

De plus pour $n = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = \ln(x).$$

5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est n fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4x^{3/2}} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8x^{5/2}} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{3 \times 5}{16x^{7/2}}. \end{aligned}$$

Posons pour tout $n \geq 2$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}}. \gg$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 2$, alors f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} \quad \text{et} \quad (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times (2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}} = (-1)^3 \frac{1 \times (4-3)}{2^2 x^{\frac{4-1}{2}}} = -\frac{1}{4x^{3/2}}.$$

Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 2$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = -\frac{2n-1}{2} \times (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}-1}} \\ &= (-1)^{n+2} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)(2n-1)}{2^{n+1} x^{\frac{2n-3}{2}}}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie : f est n -fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}}.$$

De plus, pour $n = 1$ et $n = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

5.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \cos^2(x) - \sin^2(x)$ est n dérivable sur \mathbb{R} comme différence et composée de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \sin(x) \cos(x) - 2 \cos(x) \sin(x) = -4 \sin(x) \cos(x) \\ f''(x) &= -4 \cos(x) \cos(x) + 4 \sin(x) \sin(x) = -4 (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = -4f(x) \\ f'''(x) &= -4f'(x) = 16 \sin(x) \cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= -4f''(x) = -4(-4f(x)) = 16f(x) = 16 (\cos^2(x) - \sin^2(x)). \end{aligned}$$

Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ la propriété :

$$\ll \forall x \in \mathbb{R}, f^{(2p)}(x) = (-4)^p f(x) \text{ et } f^{(2p+1)}(x) = (-4)^p f'(x). \gg$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $p = 0$, alors par ce qui précède, f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(2p)} = f^{(0)} = f = (-4)^0 f = (-4)^p f \quad \text{et} \quad f^{(2p+1)} = f' = (-4)^0 f' = (-4)^p f'.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(p) \Rightarrow \mathcal{P}(p+1)$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(2p)}(x) = (-4)^p f(x) \text{ et } f^{(2p+1)}(x) = (-4)^p f'(x).$$

Dès lors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(2p+2)}(x) = (f^{(2p)})''(x) = (-4)^p f''(x) = (-4)^p (-4) f(x) \quad \text{par ce qui précède.}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(2p+2)}(x) = (-4)^{p+1} f(x)$. De même,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(2p+3)}(x) = (f^{(2p+1)})''(x) = (-4)^p f'''(x) = (-4)^p (-4) f'(x) = (-4)^{p+1} f'(x).$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur \mathbb{R} et si n est pair, $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(2p)}(x) = (-4)^p (\cos^2(x) - \sin^2(x)),$$

et si n est impair, $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(2p+1)}(x) = (-4)^{p+1} \cos(x) \sin(x).$$

5.4 La fonction f est n fois dérivable comme produit de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^x \\ f'(x) &= 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) e^x \\ f''(x) &= (2x + 2 + x^2 + 2x) e^x = (x^2 + 4x + 2) e^x \\ f^{(3)}(x) &= (2x + 4 + x^2 + 4x + 2) e^x = (x^2 + 6x + 6) e^x \\ f^{(4)}(x) &= (2x + 6 + x^2 + 6x + 6) e^x = (x^2 + 8x + 12) e^x \\ f^{(5)}(x) &= (2x + 8 + x^2 + 8x + 12) e^x = (x^2 + 10x + 20) e^x. \end{aligned}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x. \gg$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(0)}(x) = f(x) = x^2 e^x \quad \text{et} \quad (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x = (x^2 + 0) e^x = x^2 e^x.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= ((x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x)' \\ &= (2x + 2n) e^x + (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x \\ &= (x^2 + (2n+2)x + n(2+n-1)) e^x \\ &= (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1)) e^x. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. La fonction f est n fois dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x.$$

5.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto x \cos(x)$ est n fois dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - x \sin(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) - \sin(x) - x \cos(x) = -2 \sin(x) - x \cos(x) \\ f^{(3)}(x) &= -2 \cos(x) - \cos(x) + x \sin(x) = -3 \cos(x) + x \sin(x) \\ f^{(4)}(x) &= 3 \sin(x) + \sin(x) + x \cos(x) = 4 \sin(x) + x \cos(x). \end{aligned}$$

Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(p) : \quad \ll f^{(2p)}(x) = (-1)^p [(2p) \sin(x) + x \cos(x)] \text{ et } f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p [(2p+1) \cos(x) - x \sin(x)]. \gg$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $p = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(2p)}(x) = f(x) = x \cos(x) \quad \text{et} \quad (-1)^p [(2p) \sin(x) + x \cos(x)] = (-1)^0 [0 \times \sin(x) + x \cos(x)] = x \cos(x).$$

Donc $f^{(2p)}(x) = (-1)^p [(2p) \sin(x) + x \cos(x)]$. De même, par ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(2p+1)}(x) = f'(x) = \cos(x) - x \sin(x) \quad \text{et} \quad (-1)^p [(2p+1) \cos(x) - x \sin(x)] = \cos(x) - x \sin(x).$$

Donc $f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p [(2p+1) \cos(x) - x \sin(x)]$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(p) \Rightarrow \mathcal{P}(p+1)$. Supposons $\mathcal{P}(p)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f^{(2p)}(x) &= (-1)^p [(2p) \sin(x) + x \cos(x)] \\ f^{(2p+1)}(x) &= (-1)^p [(2p+1) \cos(x) - x \sin(x)]. \end{cases}$$

Alors, en dérivant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(2p+2)}(x) &= \left(f^{(2p+1)} \right)'(x) = (-1)^p [(2p+1) \cos(x) - x \sin(x)]' \\ &= (-1)^p [-(2p+1) \sin(x) - \sin(x) - x \cos(x)] \\ &= (-1)^p [-(2p+2) \sin(x) - x \cos(x)] \\ &= (-1)^{p+1} [(2p+2) \sin(x) + x \cos(x)]. \end{aligned}$$

En dérivant une seconde fois,

$$\begin{aligned} f^{(2p+3)}(x) &= \left(f^{(2p+2)} \right)'(x) = (-1)^{p+1} [(2p+2) \cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)] \\ &= (-1)^{p+1} [(2p+3) \cos(x) - x \sin(x)]. \end{aligned}$$

Ce qui achève de démontrer $\mathcal{P}(p+1)$.

Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur \mathbb{R} et si n est pair, $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(2p)}(x) = (-1)^p [(2p) \sin(x) + x \cos(x)].$$

Si n est impair, $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p [(2p+1) \cos(x) - x \sin(x)].$$