

## Interrogation 3 d'entraînement Bijections

### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir une fonction injective, surjective, bijective.
- 1.2 Énoncer le théorème de la bijection (version 2).
- 1.3 Énoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
- 1.4 Définir la négligeabilité entre deux fonctions.

### 2. Ensemble image, image réciproque, injection, surjection, bijection.

- 2.1 Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2 + 2x + 1 \end{cases}$ . Déterminer  $f([-1; 6])$  et  $f^{-1}([-1; 1])$ . Puis préciser si  $f$  est injective, surjective et/ou bijective.
- 2.2 Soit  $f : \begin{cases} ]-\infty; 3[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(3-x) + 4 \end{cases}$ . Déterminer  $f([-7; -\frac{3}{4}])$  et  $f^{-1}([5; 11])$ . Puis préciser si  $f$  est injective, surjective et/ou bijective.
- 2.3 Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$ . Déterminer  $f([\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}])$  et  $f^{-1}([-1; 0])$ . Puis préciser si  $f$  est injective, surjective et/ou bijective.
- 2.4 Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 4 - 7x^2 + 21x \end{cases}$ . Déterminer  $f([-2; 2])$  et  $f^{-1}(]-\infty; 18])$ . Puis préciser si  $f$  est injective, surjective et/ou bijective.
- 2.5 Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{5x+2} - 2 \end{cases}$ . Déterminer  $f([0; 8])$  et  $f^{-1}([-7; -2])$ . Puis préciser si  $f$  est injective, surjective et/ou bijective.

### 3. Fonction réciproque/Dérivée de la réciproque.

- 3.1 Montrer que  $f : x \mapsto (\sqrt{2x-4} + 1)e^x$  définit une bijection de  $[2; +\infty[$  dans un ensemble  $J$  à déterminer puis montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J \setminus \{e^2\}$  et établir une expression de  $(f^{-1})'$  en fonction de  $f^{-1}$ .
- 3.2 Montrer que  $f : x \mapsto x^3(3 \ln(x) - 1)$  définit une bijection de  $]0; 1]$  dans un ensemble  $J$  à déterminer puis montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J \setminus \{-1\}$  et établir une expression de  $(f^{-1})'$  en fonction de  $f^{-1}$ .
- 3.3 Montrer que  $f : x \mapsto \ln(\tan(x))$  définit une bijection de  $]0; \frac{\pi}{2}[$  dans un ensemble  $J$  à déterminer puis montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et établir une expression de  $(f^{-1})'$  en fonction de  $f^{-1}$ .
- 3.4 Montrer que  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  définit une bijection de  $]0; 1[$  dans un ensemble  $J$  à préciser et déterminer  $f^{-1}$ .
- 3.5 Montrer que  $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x+5}$  définit une bijection de  $[-1; +\infty[$  dans un ensemble  $J$  à préciser et déterminer  $f^{-1}$ .
- 3.6 Montrer que  $f : x \mapsto e^{2x} - 2e^x$  définit une bijection de  $[\ln(2); +\infty[$  dans un ensemble  $J$  à préciser et déterminer  $f^{-1}$ .

### 4. Etude asymptotique.

- 4.1 Préciser le comportement asymptotique en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto \ln(x^3 + 2x + 1)$ .
- 4.2 Préciser le comportement asymptotique en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto \frac{4x^3+1}{(x+1)^2}$ .
- 4.3 Préciser le comportement asymptotique en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ .
- 4.4 Préciser le comportement asymptotique en  $-\infty$  de  $f : x \mapsto \frac{x+2e^x}{e^x+1}$ .
- 4.5 Préciser le comportement asymptotique en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x}$ .

### 5. Comparaison asymptotique.

- 5.1 Comparer au voisinage de  $+\infty$  les fonctions  $f : x \mapsto x^2 + 3x + 1$  et  $g : x \mapsto \sqrt{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}$ .
- 5.2 Comparer au voisinage de  $+\infty$  les fonctions  $f : x \mapsto \sin(\frac{3}{x})$  et  $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ .
- 5.3 Comparer en 0 les fonctions  $f : x \mapsto e^{-\frac{3}{x^2}}$  et  $g : x \mapsto x^2$ .
- 5.4 Comparer en 0 les fonctions  $f : x \mapsto \ln(x)$  et  $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
- 5.5 Comparer en 0 les fonctions  $f : x \mapsto 3x + \sqrt{x^6 + 2x^2}$  et  $g : x \mapsto \sin(x^2)$ .