Interrogation 31 d'entrainement
Géométrie du plan

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir un produit scalaire.
   1.2 Enoncer les propriétés de la norme euclidienne.
   1.3 Donner la définition d'un déterminant sur $(\mathbb{R}^n)^n$.
   1.4 Donner les formules géométriques du produit scalaire et du déterminant dans le plan.
   1.5 Définir le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.
   1.6 Qu'est-ce qu'un crétin sphérique ?

   Révisions

   1.8 Enoncer le théorème de Weierstrass.
   1.9 Enoncer la propriété de séparation de l'intégrale.
   1.10 Enoncer l'inégalité triangulaire.
   1.11 Enoncer l'inégalité de la moyenne.
   1.12 Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   1.13 Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

2. **Equations de droites et de cercles.**
   2.1 Soient $A\,(3,-1)$ et $B\,(2,1)$. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de (AB).
   2.2 Soient $A\,(1,1)$ et $B\,(3,7)$. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de la médiatrice de $[AB]$.
   2.3 Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de $\mathscr{D}'$ la droite parallèle à $\mathscr{D} : 3x+2y+2=0$ passant par $A\,(1,-1)$.
   2.4 Déterminer des équation cartésiennes et paramétriques du cercle de centre $\Omega\,(-2,-1)$ et passant par $A\,(1,1)$.
   2.5 Soient $A\,(1,0)$ et $B\,(3,2)$. Déterminer des équations et paramétriques du cercle de diamètre $[AB]$.
   2.6 Déterminer le centre et le rayon du cercle passant par $A\,(1,2)$, $B\,(4,3)$ et $C\,(-6,8)$.

3. **Projeté orthogonal et distance.**
   3.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5-t \\ y = 2+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $M\,(-7,18)$. Calculer la distance de M à $\mathcal{D}$ et déterminer les coordonnées de H le projeté de M sur $\mathcal{D}$.
   3.2 Soient $A\,(0,1)$, $B\,(3,-1)$ et $M\,(3,12)$ trois points du plan. Calculer la distance de M à (AB) et déterminer les coordonnées de H, le projeté de M sur (AB).
   3.3 Soient $A\,(0,1)$, $B\,(3,1)$ et $M\,(4,-1)$ trois points du plan. Calculer la distance de M à (AB) et déterminer les coordonnées de H, le projeté de M sur (AB).
   3.4 Montrer que $d_1 : 2x+y=5$ et $d_2 : 2x+y=-2$ sont parallèles et déterminer la distance de d_1 à d_2.
   3.5 Soient $d_1 : 3x-4y+4=0$ et $d_2 : 12x+5y-5=0$ et $\mathscr{E} = \{\, M \in \mathscr{P} \mid d\,(M,d_1) = d\,(M,d_2) \,\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est l'union de deux droites perpendiculaires.
   Ce sont les bissectrices de d_1 et d_2.

4. **Intersection.**
   4.1 Déterminer le **nombre** de points d'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$.
   4.2 Montrer que les droites $\mathcal{D}_1 : 3x - y + 8 = 0$, $\mathcal{D}_2 : x - 3y - 4 = 0$ et $\mathcal{D}_3 : x + 3y + 11 = 0$ sont concourantes et vérifier que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont orthogonales.
   4.3 Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ et $M\,(-2, 0) \in \mathcal{C}$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M.
   4.4 Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0$ et de la droite $\mathcal{D} : x + y + 1 = 0$.
   4.5 Soient $A\,(1, 1)$ et $B\,(2, 0)$. Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle de centre $\Omega\,(1, 2)$ de rayon 1 et de la droite (AB).
5. **Montrer qu'une application est un produit scalaire.**
   5.1 Soit $E = \mathscr{C}^1\left([0; 1]\right)$. Montrer que $\varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right) \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
   5.2 Soit $E = \mathbb{C}$ vu en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $\varphi : (z, z') \mapsto \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$ est un produit scalaire sur E.
   5.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^n P(t)Q(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
   5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $D = \mathrm{diag}\left(a_1, \ldots, a_n\right) \in \mathscr{D}_n\left(\mathbb{R}\right)$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $a_i > 0$. Montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T DY$ est un produit scalaire sur E.
   5.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k)$ est un produit scalaire sur E.