Correction de l'interrogation 31 d'entrainement Géométrie du plan

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire est une application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

- *(bilinéarité)* Pour tout $(x, y, x', y) \in E^4$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle\lambda\, x + \mu x'|y\rangle = \lambda\,\langle x|y\rangle + \mu\,\langle x'|y\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle x|\lambda\, y + \mu y'\rangle = \lambda\,\langle x|y\rangle + \mu\,\langle x|y'\rangle\,.$$

- *(symétrie)* Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- *(positive)* Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$.
- *(définie)* Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle = 0 \;\Rightarrow\; x = 0_E$.

1.2 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\|\cdot\|$ une norme sur E, $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

- *(définie)* $\|x\| = 0_{\mathbb{R}} \;\Rightarrow\; x = 0_E$
- *(positivité)* $\|x\| \geqslant 0$
- *(pseudo-linéarité)* $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\,\|x\|$
- *(norme de la somme)* $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\langle x|y\rangle + \|y\|^2$
- *(Pythagore)* si x et y sont orthogonaux alors, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

1.3 Le déterminant est l'unique application det de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(C_1, \ldots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

i. *(n-linéarité)* $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\forall C_i' \in \mathbb{R}^n$,

$$\det(C_1, \ldots, \lambda\, C_i + \mu C_i', \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n)\,.$$

ii. *(alternance)* $\forall\,(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$, on a

$$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)\,.$$

iii. *(normalisation)* Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\det(\mathscr{C}) = 1$.

1.4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors,

$$\begin{aligned} \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle &= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

1.5 Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et $\vec{v}$ un vecteur du plan. Le projeté orthogonal du $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est défini comme étant le vecteur

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}\left|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right.\right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

1.6 Un crétin sphérique est un individu gonflé (bien sûr) fermé et borné (comme la sphère en tant que partie de $\mathbb{R}^3$), et ce quel que soit le point de vue par lequel on l'observe !

Cette insulte est de Zwicky un astrophysicien du XXième siècle réputé pour ses idées, ses découvertes de supernovaes et... son caractère profondément irascible.

2. **Equations de droites et de cercles.**

2.1 Soient $A(3,-1)$ et $B(2,1)$. On note que $\overrightarrow{AB}(-1,2)$ est un vecteur directeur de (AB) et $A(3,-1)$ un point de (AB). On obtient donc les équations paramétriques suivantes :

$$\boxed{(AB)\ :\quad \begin{cases} x = 3-t \\ y = -1+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.}$$

Méthode 1. On observe que $\vec{n}(2,1)$ est un vecteur normal à (AB). Pour $M(x,y)\in\mathscr{P}$, on a donc

$$\begin{aligned} M\in(AB) \quad&\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \\ &\Leftrightarrow\quad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n}\right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad \left\langle \begin{bmatrix} x-3 \\ y+1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad 2x-6+y+1=0 \\ &\Leftrightarrow\quad 2x+y=5. \end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $M(x,y)\in\mathscr{P}$, on a

$$\begin{aligned} M\in(AB) \quad&\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow\quad \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ y+1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad 2x-6+y+1=0 \\ &\Leftrightarrow\quad 2x+y=5. \end{aligned}$$

Méthode 3. A l'aide des équations paramétriques, pour $M(x,y)\in\mathscr{P}$, on a

$$\begin{aligned} M\in(AB) \quad&\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x=3-t \\ y=-1+2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} t=3-x \\ y=-1+2(3-x)=5-2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\quad 2x+y=5. \end{aligned}$$

Méthode 4. On observe que $\vec{n}(2,1)$ est un vecteur normal à (AB). Donc une équation cartésienne de (AB) est donnée pour un $d\in\mathbb{R}$ par

$$2x+y=d.$$

Or $A(3-1)\in(AB)$ donc

$$6-1=d \ \Leftrightarrow\ d=5.$$

D'où $(AB) : 2x+y=5$.
Conclusion, dans tous les cas une équation cartésienne de (AB) est donnée par

$$\boxed{(AB)\ :\quad 2x+y=5.}$$

2.2 Soient $A(1,1)$ et $B(3,7)$. Soit $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AB]$. Soit I le milieu de $[AB]$. On a

$$x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \qquad y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4.$$

Donc $I(2,4)$ est un point de $\mathcal{D}$. De plus $\overrightarrow{AB}(2,6)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ ou encore $\vec{n}(1,3)$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$.
Méthode 1. Soit $M(x,y)\in\mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{D}qfq\overrightarrow{IM}\perp\vec{n}& \\ &\Leftrightarrow\quad \left\langle \overrightarrow{IM} \middle| \vec{n}\right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad \left\langle \begin{bmatrix} x-2 \\ y-4 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow\quad x-2+3y-12=0 \\ &\Leftrightarrow\quad x+3y=14. \end{aligned}$$

Méthode 2. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} : x + 3y = d$. Or $I(2,4) \in \mathcal{D}$. Donc

$$2 + 12 = d \leftrightarrow d = 14.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} : \quad x + 3y = 14.}$$

Méthode 1. Puisque $\vec{n}(1,3)$ est normal, $\vec{u}(-3,1)$ est directeur de $\mathcal{D}$. De plus $I(2,4) \in \mathcal{D}$. Donc

$$\boxed{\mathcal{D} : \quad \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 2. Par les équations paramétriques, pour $M(x,y) \in \mathscr{P}$,

$$M \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = 14 - 3y \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 14 - 3t \\ y = t \end{cases}.$$

On obtient,

$$\mathcal{D} : \quad \begin{cases} x = 14 - 3t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.3 Puisque $\vec{n}(3,2)$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$, il est aussi normal à $\mathscr{D}'$.
Méthode 1. Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}' \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - 3 + 2y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x + 2y = 1. \end{aligned}$$

Méthode 2. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} : 3x + 2y = d$. Or $A(1,-1) \in \mathcal{D}$. Donc

$$3 - 2 = d \leftrightarrow d = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}' : \quad 3x + 2y = 1.}$$

Méthode 1. Puisque $\vec{n}(3,2)$ est normal, $\vec{u}(-2,3)$ est directeur de $\mathscr{D}'$. De plus $A(1,-1) \in \mathscr{D}'$. Donc

$$\boxed{\mathscr{D}' : \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 2. Par les équations paramétriques, pour $M(x,y) \in \mathscr{P}$,

$$M \in \mathscr{D}' \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1-3t}{2} \end{cases}.$$

On obtient,

$$\mathscr{D}' : \quad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1-3t}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.4 Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(-2,-1)$ et passant par $A(1,1)$. Soit R son rayon. On a

$$R = \Omega A = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Ainsi, une équation cartésienne est

$$\boxed{\mathcal{C} : \quad (x+2)^2 + (y+1)^2 = 13.}$$

Des équations paramétriques sont

$$\boxed{\mathcal{C}: \quad \begin{cases} x = -2 + \sqrt{13}\cos(\theta) \\ y = -1 + \sqrt{13}\sin(\theta) \end{cases} ,\theta \in [0; 2\pi[\ \text{ (ou } \mathbb{R}).}$$

2.5 Soient $A(1,0)$ et $B(3,2)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. On peut procéder en notant que Ω le centre est le milieu de $[AB]$ et $R = \frac{AB}{2}$ ou utiliser la proposition V.8. Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad ABM \text{ est rectangle en } M \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{BM} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 + y^2 - 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 - 4 + 3 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne est donnée par

$$\boxed{\mathcal{C}: \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2.}$$

On note alors que $\Omega(2,1)$ est le centre du cercle et $R = \sqrt{2}$ son rayon. Ainsi, des équations paramétriques sont données par

$$\boxed{\mathcal{C}: \quad \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}\cos(\theta) \\ y = 1 + \sqrt{2}\sin(\theta) \end{cases} ,\theta \in]-\pi; \pi] \ \text{ (ou } \mathbb{R}).}$$

2.6 Soient d_1 la médiatrice de $[AB]$, d_2 celle de $[BC]$. Puisque $\Omega A = \Omega B = \Omega C$, on en déduit que Ω est équidistant de A et B et donc $\Omega \in d_1$. De même $\Omega \in d_2$.

Le cercle recherché est le cercle circonscrit dont le centre se trouve être l'intersection des trois médiatrices.

Soient I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. On a $I(5/2, 5/2)$ et $J(-1, 11/2)$. $\overrightarrow{AB}(3,1)$ est un vecteur normal à d_1. Donc pour $M(x,y) \in \mathscr{P}$,

$$\begin{aligned} M \in d_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{IM} \middle| \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x - \frac{5}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{15}{2} + y - \frac{5}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x + y = 10. \end{aligned}$$

Donc

$$d_1: \quad 3x + y = 10.$$

De même, $\overrightarrow{BC}(-10, 5)$ ou encore $\vec{n}(-2, 1)$ est un vecteur normal à d_2 : pour $M(x,y) \in \mathscr{P}$,

$$\begin{aligned} M \in d_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{JM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{JM} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - \frac{11}{2} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x - 2 + y - \frac{11}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x + y = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$d_2 : \quad -2x + y = \frac{15}{2}.$$

Soit (a, b) les coordonnées de Ω. Puisque $\Omega \in d_1 \cap d_2$,

$$\begin{cases} 3a + b = 10 \\ -2a + b = \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 10 \\ -5a = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - 3a = 10 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2} \\ a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Donc $\Omega\,(1/2, 17/2)$. Puis le rayon est donné par

$$R = \Omega\,A = \left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 1/2 \\ -13/2 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{1+169}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}}.$$

Conclusion, le cercle passant par A, B et C

$$\boxed{\text{a pour centre } \Omega\,(1/2, 17/2) \text{ et rayon } R = \sqrt{\frac{85}{2}}.}$$

On pense à vérifier que $\Omega\,B = R = \Omega\,C$.

$$\Omega\,A = \left\|\overrightarrow{\Omega B}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 7/2 \\ -11/2 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{49+121}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}} = R \textit{ OK!}$$

$$\Omega\,A = \left\|\overrightarrow{\Omega C}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} -13/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{169+1}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}} = R \textit{ OK!}$$

3. **Projeté orthogonal.**

3.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $M\,(-7, 18)$. D'après ses équations paramétriques, $A\,(5, 2)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Alors, $\vec{n}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est normal à $\vec{u}$ et donc à $\mathcal{D}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} d\,(M, \mathcal{D}) &= \left\|p_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{MA}\right)\right\| \\ &= \left\|\left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| \\ &= \left|\left\langle \begin{bmatrix} 12 \\ -16 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}\,(36 - 16) \\ &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d\,(M, \mathcal{D}) = 2\sqrt{10}.}$$

Méthode 1. On en déduit donc que

$$H = M \pm d\,(M, \mathcal{D})\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \end{bmatrix} \pm \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -13 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que $\overrightarrow{HM}$ et normal à $\vec{u}$ ou colinéaire à $\vec{n}$)

$$H \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = 0.$$

Si $H\,(-1, 20)$,

$$\det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 18 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0.$$

Donc $(-1, 20) \in \mathcal{D}$. Si $H(-13, 16)$,

$$\det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} -18 & 14 \\ -18 & 3 \end{vmatrix} = -18 \times 3 + 14 \times 18 = 18(14-3) = 18 \times 11 \neq 0.$$

donc $(-13, 16) \notin \mathcal{D}$. Conclusion,

$$\boxed{H \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.}$$

Méthode 2. Comme $A \in \mathcal{D}$ et que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{9+1} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{12+48}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{H \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.}$$

3.2 Soient $A(0,1)$, $B(3,-1)$ et $M(3,12)$ trois points du plan. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB). On remarque alors que $\vec{n} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\vec{u}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d(M,(AB)) &= \left\| p_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{MA}\right) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}}(6+33) \\ &= 3\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d(M,(AB)) = 3\sqrt{13}.}$$

Méthode 1. De là, on en déduit également que

$$H = M \pm \frac{d(M,(AB))}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} \pm \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que $\overrightarrow{HM}$ et normal à $\vec{u}$ ou colinéaire à $\vec{n}$)

$$H \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = 0.$$

Si $H(9, 21)$,

$$\det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 20 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 60 \neq 0.$$

Donc $(9, 21) \notin (AB)$. Si $H(-3, 3)$,

$$\det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

donc $(-3, 3) \notin (AB)$. Conclusion,

$$\boxed{H \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.}$$

Méthode 2. On a

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} \right\rangle}{13}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \frac{9-22}{13}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{H\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}.}$$

3.3 Soient $A(0,1)$, $B(3,1)$ et $M(4,-1)$ trois points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ ou encore $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB). On remarque alors que $\vec{n}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\vec{u}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
d(M,(AB)) &= \left\| p_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{MA}\right) \right\| \\
&= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\
&= \left| \left\langle \begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\rangle \right| \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d(M,(AB)) = 2.}$$

Méthode 1. De là, on en déduit également que

$$H = M \pm \frac{d(M,(AB))}{\|\vec{n}\|}\vec{n} = \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} \pm 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que $\overrightarrow{HM}$ et normal à $\vec{u}$ ou colinéaire à $\vec{n}$)

$$H \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = 0.$$

Si $H(4,1)$,

$$\det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix}4 & 1\\0 & 0\end{vmatrix} = 0.$$

Donc $(4,1) \in (AB)$. Si $H(4,-3)$,

$$\det\left(\overrightarrow{AH}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix}4 & 1\\-4 & 0\end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

donc $(4,-3) \notin (AB)$. Conclusion,

$$\boxed{H\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}.}$$

Méthode 2. On a

$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{H\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}.}$$

3.4 On note que $\vec{n_1}(2,1)$ est un vecteur normal à d_1 et $\vec{n_2}(2,1)$ un vecteur normal à d_2. Puisque $\vec{n_1} = \vec{n_2} = \vec{n}$,

$$\boxed{\text{les droites } d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont parallèles.}}$$

Pour déterminer la distance de d_1 à d_2, il suffit de prendre un point d'une des droites et de chercher sa distance à l'autre droite. On observe par exemple que $M\left(2,1\right)$ est un point de d_1 (car $2\times 2+1=5$). Calculons la distance de M à d_2. On observe que $A\left(-1,0\right)$ est un point de d_2 et $\vec{n}\left(2,1\right)$ un vecteur normal à d_2. Donc

$$\begin{aligned}
d\left(M,d_2\right) &= \left\|p_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{MA}\right)\right\| \\
&= \left\|\left\langle \overrightarrow{MA}\middle|\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{7}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{7\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

Conclusion, d la distance entre d_1 et d_2 est donnée par

$$\boxed{d=\frac{7\sqrt{5}}{5}.}$$

3.5 Soient $d_1 : 3x-4y+4=0$ et $d_2 : 12x+5y-5=0$ et $\mathscr{E}=\left\{M\in\mathscr{P}\mid d\left(M,d_1\right)=d\left(M,d_2\right)\right\}$. On observe que $\overrightarrow{n_1}\left(3,-4\right)$ est un vecteur normal à d_1 et $\overrightarrow{n_2}\left(12,5\right)$ à d_2. On observe également que $A\left(0,1\right)$ est un point à la fois de d_1 et à la fois de d_2 (c'est le point d'intersection des deux droites). Soit $M\left(x,y\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}
d\left(M,d_1\right) &= \left\|\left\langle \overrightarrow{AM}\middle|\frac{\overrightarrow{n_1}}{\|\overrightarrow{n_1}\|}\right\rangle\frac{\overrightarrow{n_1}}{\|\overrightarrow{n_1}\|}\right\| \\
&= \left|\left\langle \overrightarrow{AM}\middle|\frac{\overrightarrow{n_1}}{\|\overrightarrow{n_1}\|}\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix}x\\y-1\end{bmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{9+16}}\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{5}\left|3x-4y+4\right|.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
d\left(M,d_2\right) &= \left\|\left\langle \overrightarrow{AM}\middle|\frac{\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_2}\|}\right\rangle\frac{\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_2}\|}\right\| \\
&= \left|\left\langle \overrightarrow{AM}\middle|\frac{\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_2}\|}\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix}x\\y-1\end{bmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{144+25}}\begin{bmatrix}12\\5\end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{13}\left|12x+5y-5\right|.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{E} \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{1}{5}\left|3x-4y+4\right|=\frac{1}{13}\left|12x+5y-5\right| \\
&\Leftrightarrow\quad \frac{1}{5}\left(3x-4y+4\right)=\frac{1}{13}\left(12x+5y-5\right) \quad \text{OU} \quad \frac{1}{5}\left(3x-4y+4\right)=-\frac{1}{13}\left(12x+5y-5\right) \\
&\Leftrightarrow\quad 39x-52y+52=60x+25y-25 \quad \text{OU} \quad 39x-52y+52=-60x-25y+25 \\
&\Leftrightarrow\quad 21x+77y=77 \quad \text{OU} \quad 99x-27y=-27 \\
&\Leftrightarrow\quad 3x+11y=11 \quad \text{OU} \quad 11x-3y=-3.
\end{aligned}$$

Posons $d_3 : 3x+11y=11$ et $d_4 : 11x-3y=-3$. On observe bien que $\mathscr{E}$ est l'union de d_3 et d_4. Le vecteur $\overrightarrow{n_3}\left(3,11\right)$ est normal à d_3 et $\overrightarrow{n_4}\left(11,-3\right)$ à d_4. Puisque

$$\left\langle\overrightarrow{n_3}\middle|\overrightarrow{n_4}\right\rangle=33-33=0,$$

on en déduit que n_3 et n_4 sont orthogonaux et donc d_3 et d_4 sont bien perpendiculaires. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est l'union de deux droites } d_3 \text{ et } d_4 \text{ perpendiculaires entre elles.}}$$

De plus, on peut observer que $A(0,1)$ appartient à d_3 et d_4. Toutes ces droites sont bien concourantes en A. Les droites d_3 et d_4 sont les bissectrices de d_1 et d_2.

4. **Intersection.**

4.1 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 = 2^2.$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon $R = 2$. De la même façon, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 = 3^2.$$

Donc $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $\Omega'(-1,1)$ et de rayon $R' = 3$. On observe alors que

$$\Omega\,\Omega' = \left\|\overrightarrow{\Omega\,\Omega'}\right\| = \left\|\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

D'autre part, $R + R' = 3 + 2 = 5$ et $|R - R'| = 3 - 2 = 1$. Donc

$$|R - R'| = 1 < \Omega\,\Omega' < 5 = R + R'.$$

Conclusion, $\boxed{\text{les deux cercles se coupent en deux points distincts.}}$

4.2 Soit $M(x,y)$ un point du plan. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \\ x + 3y + 11 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \\ x + 3y + 11 = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 8y + 20 = 0 \\ 6y + 15 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3y + 4 = 0 \\ y = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 4 = -\frac{7}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve donc bien un point d'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_2 = \{(-7/2; -5/2)\}$. Donc $\boxed{\text{les trois droites } \mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2 \text{ et } \mathcal{D}_3 \text{ sont concourantes}}$. De plus $\overrightarrow{n_1}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$ et $\overrightarrow{n_3}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_3$. Or $\langle \overrightarrow{n_1} | \overrightarrow{n_2} \rangle = 3 \times 1 - 1 \times 3 = 0$. Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux donc $\boxed{\mathcal{D}_1 \text{ et } \mathcal{D}_3 \text{ sont perpendiculaires}}$.

4.3 Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ et $M(-2,0) \in \mathcal{C}$.
NB : on a bien $M \in \mathcal{C}$ car $(-2)^2 + 4 \times (-2) + 4 = 0$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 + (y+3)^2 = 9 = 3^2.$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2,-3)$ et de rayon $R = 3$. Alors le vecteur $\overrightarrow{\Omega\,M}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point M. Soit $N(x,y) \in \mathscr{P}$. On a

$$N \in \mathcal{T} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{MN} \middle| \overrightarrow{\Omega\,M} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix}x+2\\y\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \right\rangle = 3y = 0.$$

Conclusion,
$\boxed{y = 0 \text{ est une équation cartésienne de } \mathcal{T} \text{ la tangente à } \mathcal{C} \text{ au point } M.}$

4.4 Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + (-x-1)^2 + \frac{5}{2}x + 2(-x-1) + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{2}x - 2x - 2 + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à $2x^2 + 6x + 1$. On a $\Delta = \frac{25}{4} - 8 = -\frac{7}{4} < 0$ Nous n'avons donc aucune solution. $\boxed{\text{L'ensemble des points d'intersection est vide.}}$

Autre méthode : On pouvait le voir en calculant le centre du cercle, son rayon, puis la distance du centre du cercle à la droite $\mathcal{D}$ et en vérifiant que cette distance est strictement plus grande que le rayon du cercle : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + (y+1)^2 - 1 + 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$ et de rayon $R = \frac{3}{4}$. Le vecteur $\vec{n}(1, 1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$, d'équation $x + y + 1 = 0$ donc

$$d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{\left|-\frac{5}{4} - 1 + 1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

Donc $d(\Omega, \mathcal{D})^2 = \frac{25}{32} > \frac{18}{32} = \frac{9}{16} = R^2$. Donc $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$ et on conclut

$$\boxed{\text{La droite } \mathcal{D} \text{ et le cercle } \mathcal{C} \text{ ne s'intersectent pas.}}$$

NB : cette méthode ne retourne que le nombre de points d'intersection mais ne calcule pas leurs coordonnées lorsque ces points existent. D'autre part, on note que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -1)$ est un vecteur directeur de (AB). Donc $\vec{n}(1, 1)$ est un vecteur normal à (AB). Pour $M(x, y)$, on a

$$\begin{aligned}
M \in (AB) \quad & \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x - 1 + y - 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x + y = 2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} \cap (AB) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (2-x-2)^2 = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + x^2 = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 2x = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M(1,1) \qquad \text{OU} \qquad M(0,2).
\end{aligned}$$

Conclusion, $\mathcal{I}$ l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite (AB) est constitué de deux points :

$$\boxed{\mathcal{I} = \{(1,1)\,;(0,2)\}.}$$

On peut vérifier que ces deux points vérifient l'équation de (AB) et de $\mathcal{C}$.

5. **Montrer qu'une application est un produit scalaire.**

5.1 Soit $E = \mathscr{C}^1([0;1])$. Pour tout $(f,g) \in E^2$, f, g, f' et g' sont continues sur $[0;1]$ donc $fg + f'g'$ également. Donc $\varphi(f,g)$ pour tout $(f,g) \in E^2$. Donc φ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(f,g,h) \in E^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (g(t)f(t) + g'(t)f'(t))\,\mathrm{d}t = \varphi(g,f).$$

- *(bilinéarité)*

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + \mu h, g) &= \int_0^1 \big((\lambda f(t) + \mu h(t))\,g(t) + (\lambda f + \mu h)'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (\lambda f(t)g(t) + \mu h(t)g(t) + \lambda f'(t)g'(t) + \mu h'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 (h(t)g(t) + h'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\,\varphi(f,g) + \mu\,\varphi(h,g).
\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- *(positive)*

$$\varphi(f,f) = \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [0;1]$, $f(t)^2 + f'(t)^2 \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(f,f) \geqslant 0.$$

- *(définie)* Supposons $\varphi(f,f) = 0$. La fonction $t \mapsto f(t)^2 + f'(t)^2$ est **continue** sur $[0,1]$, **positive**, **d'intégrale nulle**. Donc par le principe de séparation de l'intégrale, $\forall t \in [0;1]$, $f(t)^2 + f'(t)^2 = 0$. Or la somme de deux réels positifs est nulle si les deux réels sont nuls :

$$\forall t \in [0;1] \ \begin{cases} f(t) = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f = 0_E.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathscr{C}^1([0;1]).}$$

5.2 Soit $E = \mathbb{C}$ vu en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La fonction φ est bien définie sur $\mathbb{C}^2$ et renvoie bien un réel. De plus, pour tout $(z, z', z'') \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*

$$\begin{aligned}\varphi(z, z') = \operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right) &= \operatorname{Re}\left(\overline{z\overline{z'}}\right) && \text{car } \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(\overline{a}) \\ &= \operatorname{Re}(\overline{z}z') \\ &= \operatorname{Re}(z'\overline{z}) && = \varphi(z', z).\end{aligned}$$

- *(bilinéarité)*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda z + \mu z', z'') &= \operatorname{Re}\left((\lambda z + \mu z')\overline{z''}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\lambda z\overline{z''} + \mu z'\overline{z''}\right) \\ &= \lambda \operatorname{Re}\left(z\overline{z''}\right) + \mu \operatorname{Re}\left(z'\overline{z''}\right) && \text{car } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \\ &= \lambda\varphi(z, z'') + \mu\varphi(z', z'').\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- *(positive)*

$$\varphi(z, z) = \operatorname{Re}(z\overline{z}) = \operatorname{Re}\left(|z|^2\right) = |z|^2 \qquad \text{car } |z|^2 \in \mathbb{R}$$

  Donc

$$\varphi(z, z) \geqslant 0.$$

- *(définie)* Supposons $\varphi(z, z) = 0$. Par ce qui précède, on a alors $|z|^2 = 0$ i.e. $z = 0$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{C}.}$$

5.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $t \mapsto P(t)$ et $t \mapsto Q(t)$ sont deux fonctions continues sur $[0; 1]$ en tant que fonction polynomiale. Donc $t \mapsto t^n P(t)Q(t)$ aussi et donc $\varphi(P, Q) = \int_0^1 t^n P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci étant vrai pour tout $(P, Q) \in E^2$, on en déduit que φ est bien définie sur E^2 et renvoie bien un réel. De plus, pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 t^n P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(Q, P).$$

- *(bilinéarité)*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \int_0^1 t^n (\lambda P(t) + \mu Q(t)) R(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^1 t^n P(t)R(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 t^n Q(t)R(t)\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda\varphi(P, R) + \mu\varphi(Q, R).\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- *(positive)*

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 t^n P(t)^2\,\mathrm{d}t$$

  Pour tout $t \in [0; 1]$, $P(t)^2 \geqslant 0$ et $t^n \geqslant 0$ car $t \geqslant 0$. Donc pour tout $t \in [0; 1]$, $t^n P(t)^2 \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(P, P) \geqslant 0.$$

- *(définie)* Supposons $\varphi(P, P) = 0$. La fonction $t \mapsto t^n P(t)^2$ est **continue** sur $[0, 1]$, **positive**, **d'intégrale nulle**. Donc par le principe de séparation de l'intégrale, $\forall t \in [0; 1]$, $t^n P(t)^2 = 0$. Or pour tout $t \in]0; 1]$, $t^n \neq 0$, donc $\forall t \in]0; 1]$, $P(t) = 0$. Donc le polynôme P possède une infinité de racines. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}[X].}$$

5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $a_i > 0$. Pour tout $(X,Y) \in E^2$, $X^T \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $X^T DY$ et appartient à $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ i.e. est un réel. Donc φ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(X,Y,Z) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)* $\varphi(X,Y) = X^T DY$. Puisque $X^T DY \in \mathbb{R}$, $X^T DY = \left(X^T DY\right)^T$. Par propriété,

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y) = X^T DY &= \left(X^T DY\right)^T \\ &= Y^T D^T \left(X^T\right)^T \\ &= Y^T DX \qquad \text{car } D \text{ est symétrique car diagonale} \qquad = \varphi(Y,X).\end{aligned}$$

- *(bilinéarité)*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda X + \mu Y, Z) &= (\lambda X + \mu Y)^T DZ \\ &= \left(\lambda X^T + \mu Y^T\right) DZ \qquad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda X^T DZ + \mu Y^T DZ \\ &= \lambda \varphi(X,Z) + \mu \varphi(Y,Z).\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.
- *(positive)*

$$\varphi(X,X) = X^T DX.$$

  Notons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\varphi(X,X) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{bmatrix} \\ &= a_1 x^2 + \cdots + a_n x_n^2.\end{aligned}$$

  Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $a_i > 0$, donc $a_i x_i^2 \geqslant 0$ et donc

$$\varphi(X,X) \geqslant 0.$$

- *(définie)* Supposons $\varphi(X,X) = 0$. Par ce qui précède, on a $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 = 0$. Puisque pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $a_k x_k^2 \geqslant 0$, on en déduit que nécessairement,

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad a_k x_k^2 = 0.$$

  Or pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $a_k > 0$. Donc $x_k = 0$ et finalement $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}^n.}$$

5.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. La fonction φ est bien définie sur E^2 et est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(P,Q,R) \in E^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k) P^{(k)}(k) = \varphi(Q,P).$$

- *(bilinéarité)*

$$\begin{aligned}\varphi\left(\lambda P+\mu Q,R\right)&=\sum_{k=0}^{n}\left(\lambda P+\mu Q\right)^{(k)}(k)R^{(k)}(k)\\&=\lambda\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(k)R^{(k)}(k)+\mu\sum_{k=0}^{n}Q^{(k)}(k)R^{(k)}(k)\\&=\lambda\,\varphi\left(P,R\right)+\mu\,\varphi\left(Q,R\right).\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.
- *(positive)*

$$\varphi\left(P,P\right)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(k)P^{(k)}(k)=\sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(k)\right)^2.$$

  En tant que somme de termes positifs,

$$\varphi\left(P,P\right)\geqslant 0.$$

- *(définie)* Supposons $\varphi\left(P,P\right)=0$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(k)\right)^2=0$. Puisque les termes sont positifs,

$$\forall k\in[\![0;n]\!],\qquad P^{(k)}(k)=0.$$

  Puisque $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $P^{(n)}\in\mathbb{R}_0[X]$ est constant (éventuellement nul). Or $P^{(n)}(n)=0$. Donc $P^{(n)}=0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $P^{(n-1)}$ est constant. Or $P^{(n-1)}(n-1)=0$ donc $P^{(n-1)}=0_{\mathbb{R}[X]}$. Par récurrence, on en déduit que $P^{(0)}=0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.
  On peut aussi procéder par l'absurde. Supposons $P\neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Soit d son degré et a_d son coefficient dominant. Dès lors, $P^{(d)}=d!a_d$. Puisque $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $d\in[\![0;n]\!]$. Donc $P^{(d)}(d)=0$. D'où $d!a_d=0$ impossible. Donc $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi\text{ est un produit scalaire sur }E=\mathbb{R}_n[X].}$$