Interrogation 33 d'entrainement
Révisions II

1. **Restituer le cours.** *Source : Int18.1*
   1.1 Définir le polynôme dérivé.
   1.2 Enoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
   1.3 Enoncer les deux formules de Taylor pour les polynômes.
   1.4 Enoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
   1.5 Définir une racine de multiplicité m.
   1.6 Caractériser la multiplicité à l'aide des dérivées.

   Restituer le cours. *Source : Int30.1*

   1.5 Définir la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.
   1.6 Définir l'espérance de X, la variance de X (+formule) et la fonction génératrice de X.
   1.7 Enoncer le lien entre la fonction génératrice, l'espérance et la variance.
   1.8 Que dire de l'espérance, la variance et la fonction génératrice de deux variables indépendantes ?
   1.9 Enoncer le théorème de transfert.
   1.10 Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   1.11 Enoncer la propriété sur la somme de deux binomiales.

2. **Inéquations trigonométriques.** *Source : Int4.5*
   2.1 Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) > \sqrt{2}$.
   2.2 Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(4x) + \left(\sqrt{3} - 2\right)\sin(2x) \geqslant 1 - \sqrt{3}$.
   2.3 Déterminer l'ensemble des réels $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[$ tels que $\tan(2x) \leqslant 3\tan(x)$.
   2.4 Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leqslant 0$.
   2.5 Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $4\cos(x)\sin(x) + 1 \leqslant 0$.

3. **Savoir faire un changement de variable.** *Source : Int9.4*
   3.1 Justifier que $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{ch}(x) - 1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $y = \mathrm{e}^x$.
   3.2 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1+\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{sh}^2(x)}\,\mathrm{ch}(x)$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide d'un changement de variable.
   3.3 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ admet des primitives sur $]0\,; \pi[$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $s = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
   3.4 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ admet des primitives sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,; \frac{\pi}{2}\right[$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $a = \tan(x)$.
   3.5 Justifier que $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $\theta = \sqrt{1+x^6}$.

4. **Formule de changement de base.** *Source : Int28.4*

4.1 Soient $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$, $\mathscr{B}_4$ quatre bases et f une application linéaire. Calculer $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_4}(f)$ sachant que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&3\end{pmatrix},\quad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{B}_1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix},$$
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_4)=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix},\quad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_4}(\mathscr{B}_2)=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}.$$

4.2 On considère $f\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=(x-y+3z,2y+z)$. On pose $\mathscr{B}_3=((1,0,0),(-1,1,0),(1,-3,2))$, $\mathscr{B}_2=((-1,1),(5,-2))$, $\mathscr{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On donne $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{C}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}$ et $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{C}_2)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&5\\1&1\end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f)$.

4.3 Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases et f un endomorphisme. Calculer $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sachant que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}5&-4&2\\14&-10&4\\16&-10&3\end{pmatrix},\quad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&1\\1&2&2\end{pmatrix},\quad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\3&-2&1\\-2&1&0\end{pmatrix}.$$

4.4 On pose $M=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé, $e_1=(0,1,0)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(1,0,-1)$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et en déduire $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

4.5 Soient $M=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&1&0\\1&0&2&-1\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. On pose $e_1=(1,1,0,0)$, $e_2=(0,0,1,1)$, $e_3=(0,1,0,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Calculer $f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)$ et en déduire $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

4.6 Soient $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. On pose $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,1,0)$ et $e_3=(-2,0,0)$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1),f(e_2),f(e_3)$ et en déduire $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

5. **Nature d'une série par équivalent.** *Source : Int21.2*

5.1 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{2^n+3^n}{5n^3-\ln(n)+5^n}$.

5.2 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

5.3 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.

5.4 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

5.5 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=-\left[2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$.