Interrogation 34 d'entrainement
Révisions III

1. **Restituer le cours.** *Source : Int8.1*
   1.1 Enoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
   1.2 Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
   1.3 Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
   1.4 Définir l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Que dire du produit de deux racines n-ième de l'unité ? de l'inverse d'une racine n-ième de l'unité ? de son conjugué ?
   1.5 Caractériser l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
   1.6 Définir j. Que vaut j^2 ? j^3 ? $1+j+j^2$?
   1.7 Caractériser les racines n-ièmes de l'unité par une somme.
   1.8 Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe quelconque.

   Restituer le cours. *Source : Int25.1*
   1.9 Que dire de l'image d'une famille par une application linéaire ? (Prop II.5)
   1.10 Caractériser une application linéaire suivant l'image d'une base. (Prop II.6)
   1.11 Comparer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée suivant la nature de l'application linéaire.
   1.12 Définir le rang.
   1.13 Enoncer le théorème du rang.
   1.14 Caractériser les isomorphismes en dimension finie.

2. **Encadrer une intégrale.** *Source : Int26.2*
   2.1 Soit $a>1$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{e}^{-t^n}\cos\left(\sqrt{t}\right)\ln(t)}{1+2t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   2.2 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
   2.3 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_n^{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}}\,t^5\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
   2.4 Soient $a>0$ et $f\in\mathscr{C}([0;a])$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^a \arctan\left(\mathrm{e}^{nt}+2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt}+3\right)f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   2.5 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\operatorname{ch}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

3. **Savoir déterminer une solution particulière.** *Source : Int11.4*
   3.1 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t\in\mathbb{R},\quad y''(t)+4y'(t)+4y(t)=(t+1)\,\mathrm{e}^{2t}$.
   3.2 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t\in\mathbb{R},\quad y''(t)+y'(t)-2y(t)=9\,\mathrm{e}^{t}$.
   3.3 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t\in\mathbb{R},\quad y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t^3-6t+4$.
   3.4 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t\in\mathbb{R},\quad y''(t)-4y'(t)+4y(t)=5\,\mathrm{e}^{2t}$.
   3.5 Déterminer une solution de l'équation (E) suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable : $(E) : \forall t\in\mathbb{R},\quad y''(t)+4y(t)=(t+1)\cos(2t)$.

4. **Savoir appliquer la méthode de variation de la constante.** *Source : Int10.3*
   4.1 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{2x}{1-x^2}y(x) = \sqrt{1-x^2}$ admet des solutions sur $I =]-1\,;1[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto 1-x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.
   4.2 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{1+x}y(x) = 1 + \ln(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   Intégrer $x \mapsto x\ln(x)$ par une intégration par parties.
   4.3 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) - 2y(x) = \cos(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   4.4 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{x(x+1)}y(x) = (x+1)\arctan(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   4.5 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{1+x}y(x) = \sin(x)$ admet des solutions sur $I =]-1\,;+\infty[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
5. **Donner une forme explicite.** *Source : Int17.3*
   5.1 Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -11$, $u_1 = -\frac{37}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} - 2u_n + 15 = 0$.
   5.2 Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n$.
   5.3 Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n + 48n - 24$. *On pourra poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3n$.*
   5.4 On pose $f : x \mapsto x + 3$, $u_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner une expression explicite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   5.5 Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \mathrm{e}^2$, $u_1 = \mathrm{e}^5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^5}{u_n^6}$. *On pourra poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.*