Interrogation 35 d'entrainement
Révisions IV

1. **Restituer le cours.** *Source : Int5.1*
   - 1.1 Réviser les formules de développement, linéarisation et factorisation de trigonométrie.
   - 1.2 Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
   - 1.3 Enoncer la formule donnant le carré du module d'une somme.
   - 1.4 Enoncer les inégalités triangulaires.
   - 1.5 Enoncer les formules d'Euler.
   - 1.6 Enoncer la formule de Moivre.

   Restituer le cours. *Source : Int19.1*
   - 1.7 Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
   - 1.8 Définir la somme de deux espaces vectoriels.
   - 1.9 Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
   - 1.10 Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
   - 1.11 Enoncer les deux relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme.
2. **Equations.** *Source : Int7.5*
   - 2.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2^{x+1} + 4^x = 15$.
   - 2.2 Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\log_a(x) = \log_x(a)$.
   - 2.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2^{x^2} = 3^{x^3}$.
   - 2.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(\arcsin(x) - 5)\arcsin(x) = -4$.
   - 2.5 Démontrer que l'équation $\arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$ admet au plus une solution et donner la valeur de l'unique réel possiblement solution.
   - 2.6 Démontrer que l'équation $\arcsin(x) + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ admet au plus une solution et donner la valeur de l'unique réel possiblement solution.
   - 2.7 Démontrer que l'équation $\arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4}$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$ et préciser l'unique valeur du réel possiblement solution.
   - 2.8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \arctan(x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$.
3. **Montrer la supplémentarité à l'aide de la dimension.** *Source : Int22.5*
   - 3.1 Démontrer à l'aide de la dimension que les sous-espaces vectoriels $F = \{\, P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0 \,\}$ et $G = \{\, P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0 \,\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   - 3.2 Démontrer à l'aide de la dimension que $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x + 2y - z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((0,0,-1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   - 3.3 Démontrer à l'aide de la dimension que $F = \{\, M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0 \,\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   - 3.4 Démontrer que $F = \mathrm{Vect}\,((1,0,1),(0,4,0),(1,-2,1))$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1,0,0))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   - 3.5 Démontrer à l'aide de la dimension que $F = \mathbb{R}_3[X]$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X^5, X + X^4\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$.
   - 3.6 A l'aide du théorème de la division euclidienne, montrer que $F = \{\, P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(3) = P'(3) = P''(3) = 0 \,\}$ et $G = \mathbb{R}_2[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$.

4. **Calculer un équivalent.** *Source : Int23.5*
   4.1 Calculer un équivalent en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} + \mathrm{e}^{\mathrm{ch}(x)} - 2\,\mathrm{e}$.
   4.2 Calculer un équivalent en 0 de $f(x) = \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\cos(\mathrm{sh}(x))-1}$.
   4.3 Calculer un équivalent en 0 de $f(x) = \ln\left(1+\arctan\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\right) - \ln\left(1+\sin\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\right)$.
   4.4 Calculer un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \left(1+\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n$.
   4.5 Calculer un équivalent en 0 de $f(x) = \sqrt{1+\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)} - \sqrt{\mathrm{ch}(x)}$.
5. **Calcul dans $\mathbb{R}$.** *Source : Int1.5*
   5.1 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2-1} = x+2$.
   5.2 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1}$.
   5.3 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2}$.
   5.4 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{2x^2-x-3} = x+1$.
   5.5 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = -1+\sqrt{x^2-2}$.