Correction de l'interrogation 4 d'entrainement
Trigonométrie

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

Si on suppose de plus a, b, $a+b$ et $a-b$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

1.2 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(b-a)}{2}$$

1.3 Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

1.4 On a les valeurs suivantes :

$$\cos(0) = 1, \qquad \sin(0) = 0, \qquad \tan(0) = 0$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty.$$

1.5 On a

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1.$$

1.6 Pour le cosinus, on a

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x \mapsto \cos(x)$	1	0	-1	0	1

Pour le sinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Pour la tangente :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x \mapsto \tan(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	0

1.7 Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

1.8 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ tel que $\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

2. **Développer/Linéariser.**

2.1 Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(3a) &= \cos(2a)\sin(a) + \cos(a)\sin(2a) \\ &= \left(1 - 2\sin^2(a)\right)\sin(a) + 2\cos^2(a)\sin(a) \\ &= \sin(a) - 2\sin^3(a) + 2\left(1 - \sin^2(a)\right)\sin(a). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a).}$$

2.2 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \cos(a+b+c) &= \cos(a+b)\cos(c) - \sin(a+b)\sin(c) \\ &= \cos(a)\cos(b)\cos(c) - \sin(a)\sin(b)\cos(c) - \sin(a)\cos(b)\sin(c) - \cos(a)\sin(b)\sin(c). \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b+c) = \cos(a)\cos(b)\cos(c) &- \sin(a)\sin(b)\cos(c) \\ &- \sin(a)\cos(b)\sin(c) - \cos(a)\sin(b)\sin(c). \end{aligned}}$$

2.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2}\sin(x) \\ &= \frac{\sin(x) - \cos(2x)\sin(x)}{2} \\ &= \frac{\sin(x) - \frac{\sin(2x+x) - \sin(2x-x)}{2}}{2} \\ &= \frac{2\sin(x) - \sin(3x) + \sin(x)}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^3(x) = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}.}$$

2.4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sin^2(3\theta)\cos(5\theta) &= \frac{1-\cos(6\theta)}{2}\cos(5\theta)\\
&= \frac{\cos(5\theta) - \cos(6\theta)\cos(5\theta)}{2}\\
&= \frac{\cos(5\theta) - \frac{\cos(6\theta+5\theta)+\cos(6\theta-5\theta)}{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(3\theta)\cos(5\theta) = \frac{2\cos(5\theta) - \cos(11\theta) - \cos(\theta)}{4}.}$$

2.5 Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. On a

$$\begin{aligned}
\tan^2(\theta)\left[\cos(2\theta)+1\right] &= \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} 2\cos^2(\theta)\\
&= 2\sin^2(\theta) && \textit{car } \theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\\
&= 1 - \cos(2\theta).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan^2(\theta)\left[\cos(2\theta)+1\right] = 1 - \cos(2\theta).}$$

3. **Factoriser/Mettre sous forme polaire.**

3.1 Soit $a \in \mathbb{R}$.On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sqrt{3}\cos(a) + \sin(a)\\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(a) + \frac{1}{2}\sin(a)\right)\\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(a) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(a)\right)\\
&= 2\cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{3}\cos(a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\cos\left(a - \frac{\pi}{6}\right).}$$

3.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)\\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) + \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).}$$

3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(x+\pi) &= -\cos(x) - \sin(x)\\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(x)\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right).}$$

3.4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sin(\theta)+\sin(4\theta-\pi) &= \sin(\theta)-\sin(4\theta)\\ &= 2\cos\left(\frac{\theta+4\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-4\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\theta)+\sin(4\theta-\pi)=-2\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right).}$$

3.5 Soit $(p,q)\in\mathbb{R}^2$. Attention au piège des notations ! On a

$$\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)+\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}}{2}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{R}^2, \qquad \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)+\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)=2\sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{2}\right).}$$

3.6 Soit $(p,q)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\cos(p)+\cos(q)+\sin(p)+\sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)+2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)+\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{R}^2, \qquad \cos(p)+\cos(q)+\sin(p)+\sin(q)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{\pi}{4}\right).}$$

4. **Equations trigonométriques.**

4.1 Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(2x)-\cos(4x)=\sin(3x) \quad &\Leftrightarrow \quad -2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=\sin(3x)\\ &\Leftrightarrow \quad 2\sin(3x)\sin(x)=\sin(3x)\\ &\Leftrightarrow \quad \sin(3x)=0 \quad \text{OU} \quad \sin(x)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad 3x\equiv 0\ [\pi] \quad \text{OU} \quad x\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad x\equiv\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow \quad x\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{3}\right] \quad \text{OU} \quad x\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad x\equiv\frac{5\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{k\frac{\pi}{3}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

4.2 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\tan(2x) + \tan(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} + \tan(x) = 0 \qquad \textit{car } \tan^2(x) \neq 1 \text{ car } x \not\equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right] \\
&\Leftrightarrow \quad 2\tan(x) + \tan(x) - \tan^3(x) = 0 \ \textit{car on a toujours } 1 - \tan^2(x) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3\tan(x) - \tan^3(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \tan(x) = 0 \quad \text{OU} \quad \tan^2(x) = 3 \\
&\Leftrightarrow \quad \tan(x) = 0 \quad \text{OU} \quad \tan(x) = \sqrt{3} \quad \text{OU} \quad \tan(x) = -\sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv 0\ [\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [\pi].
\end{aligned}$$

Ces valeurs étant compatibles avec le domaine de définition de x, on conclut que l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

4.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned}
3\tan(x) = 2\cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad 3\sin(x) = 2\cos^2(x) \qquad \textit{car } \cos(x) \neq 0 \ \textit{car } x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad 3\sin(x) = 2 - 2\sin^2(x) \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x \mapsto 2x^2 + 3x - 2$. On a $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-3-5}{4} = -2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
3\tan(x) = 2\cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \sin(x) = -2 \text{ (impossible)} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

Ces valeurs étant compatibles avec le domaine de définition de x, on conclut que l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

4.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) + \cos(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) + \cos(x) = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) + \cos(x) = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right) + \cos(x) = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 4\cos^3(x) - 2\cos(x) - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Soit $P : t \mapsto 4t^3 - 2t - 2$. On note que $t = 1$ est une racine de P, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = (t-1)\left(4t^2 + 4t + 2\right).$$

Soit Δ le discriminant de $t \mapsto 4t^2 + 4t + 2$, on a $\Delta = 16 - 32 = -16 < 0$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $4t^2 + 4t + 2 > 0$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$$

D'où,

$$\cos(3x) + \cos(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 0\ [2\pi].$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$$

4.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \sin^4(x) - \cos^4(x) = 2\sin(x)\cos(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\sin^2(x)\right)^2 - \left(\cos^2(x)\right)^2 = \sin(2x) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \sin(2x) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x) - 1 - 2\cos(2x) - \cos^2(2x)}{4} = \sin(2x) \\
\Leftrightarrow\quad & -\cos(2x) = \sin(2x) \\
\Leftrightarrow\quad & \cos(2x+\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\
\Leftrightarrow\quad & 2x + \pi \equiv \frac{\pi}{2} - 2x\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad 2x + \pi \equiv 2x - \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
\Leftrightarrow\quad & 4x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad \pi \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\ \text{(impossible)} \\
\Leftrightarrow\quad & 4x \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \\
\Leftrightarrow\quad & x \equiv \frac{3\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

5. **Inéquations trigonométriques.**

5.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) > \sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \right[.}$$

5.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(4x) + \left(\sqrt{3} - 2\right)\sin(2x) \geqslant 1 - \sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad & 1 - 2\sin^2(2x) + \left(\sqrt{3}-2\right)\sin(2x) - 1 + \sqrt{3} \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\sin^2(2x) - \left(\sqrt{3}-2\right)\sin(2x) - \sqrt{3} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $P : t \mapsto 2t^2 - \left(\sqrt{3}-2\right)t - \sqrt{3}$, on a

$$\Delta = \left(\sqrt{3}-2\right)^2 + 8\sqrt{3} = 3 - 4\sqrt{3} + 4 + 8\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = \left(\sqrt{3}+2\right)^2.$$

Par conséquent, les racines associées sont $\frac{\sqrt{3}-2-\left(\sqrt{3}+2\right)}{4} = -1$ et $\frac{\sqrt{3}-2+\left(\sqrt{3}+2\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos(4x) + \left(\sqrt{3}-2\right)\sin(2x) \geqslant 1 - \sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad & -1 \leqslant \sin(2x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3}+k\pi ; \frac{7\pi}{6}+k\pi\right].}$$

5.3 Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[$. Notons que puisque la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$, on a alors $\tan(x) \in [0;1[$. On a alors les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned}
\tan(2x) \leqslant 3\tan(x) &\Leftrightarrow \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \leqslant 3\tan(x) && \textit{car } 1-\tan^2(x) \neq 0 \ \textit{car } \tan(x)\in[0;1[\\
&\Leftrightarrow 2\tan(x) \leqslant 3\tan(x) - 3\tan^3(x) && \textit{car } 1-\tan^2(x) > 0 \ \textit{car } \tan(x)\in[0;1[\\
&\Leftrightarrow \left(3\tan^2(x)-1\right)\tan(x) \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow 3\tan^2(x) - 1 \leqslant 0 && \textit{car } \tan(x) \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow \tan^2(x) \leqslant \frac{1}{3}\\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant \tan(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} && \textit{car } \tan(x) \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant \tan(x) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Or $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[$. Conclusion l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[.}$$

5.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + 1 \leqslant 0\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant -\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right) \leqslant -\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &\exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{2\pi}{3}+2k\pi \leqslant 2x - \frac{\pi}{12} \leqslant \frac{4\pi}{3}+2k\pi\\
\Leftrightarrow\quad &\exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{3\pi}{4}+2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{17\pi}{12}+2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{8}+k\pi ; \frac{17\pi}{24}+k\pi\right].}$$

5.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
4\cos(x)\sin(x) + 1 \leqslant 0 &\Leftrightarrow 2\sin(2x) \leqslant -1\\
&\Leftrightarrow \sin(2x) \leqslant -\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{-5\pi}{6}+2k\pi \leqslant 2x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2k\pi
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi ; -\frac{\pi}{12}+k\pi\right].}$$