Correction de l'interrogation 5 d'entrainement
Nombres complexes

1. **Restituer le cours.**

   1.1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad \text{et} \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$

   1.2 Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$

   1.3 Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a
$$||z| - |z'|| \leqslant |z+z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

   1.4 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

   1.5 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2. **Calculs de complexes.**

   2.1 On a les égalités entre complexes suivantes :
$$z = \frac{(5-i)(2-3i)}{(1+i)(1-2i)} = \frac{10-15i-2i-3}{1-2i+i+2} = \frac{7-17i}{3-i} = \frac{(7-17i)(3+i)}{9+1} = \frac{21+7i-51i+17}{10} = \frac{38-44i}{10}.$$
   Conclusion,
$$\boxed{z = \frac{19}{5} - i\frac{22}{5}.}$$

   2.2 Par la factorisation par l'angle moitié, on a
$$\begin{aligned} z = \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)^{15} = \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\left[\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right]\right)^{15} &= \mathrm{e}^{i5\pi}\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{15} \\ &= (-1) \times \left(i\sqrt{3}\right)^{15} \\ &= -3^7 \times \sqrt{3} \times (-i) \\ &= 3^7\sqrt{3}i. \end{aligned}$$
   Eventuellement on peut préciser que $3^7 = 2187$. Conclusion,
$$\boxed{z = \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)^{15} = 3^7\sqrt{3}i.}$$

   2.3 On sait que
$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
   Par conséquent,
$$\begin{aligned} z = (3-2i)^4 &= 3^4 + 4 \times 3^3 \times (-2i) + 6 \times 3^2 \times (-2i)^2 + 4 \times 3 \times (-2i)^3 + (-2i)^4 \\ &= 9^2 - 8i \times 27 - 24 \times 9 + 12 \times 8i + 16 \\ &= 81 - 216i - 216 + 96i + 16 \\ &= 97 - 216 - 120i \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{z = (3-2i)^4 = -119 - 120i.}$$

2.4 Puisque $2019 = 4 \times 504 + 3$, on a

$$z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{2019\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i504\pi}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i.$$

Conclusion,

$$\boxed{z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{2019\pi}{4}} = -1 + i.}$$

2.5 On passe par la forme polaire du numérateur et du dénominateur. On a d'une part

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$

D'autre part,

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{188} = \left(\frac{2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{188} &= \left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{188} \\ &= 2^{94}\,\mathrm{e}^{i\frac{47\times 7\pi}{3}} \\ &= 2^{94}\,\mathrm{e}^{i\frac{329\pi}{3}} \\ &= 2^{94}\,\mathrm{e}^{i109\pi + i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 2^{94}\,(-1)\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 2^{94}\,(-1)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2^{93}\left(1 - \sqrt{3}i\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{z = 2^{93} - 2^{93}\sqrt{3}i.}$$

3. **Applications de la formule d'Euler et de la formule de Moivre.**

3.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule d'Euler,

$$\sin^4(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^4.$$

Or on sait que

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Donc,

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2^4}\left(\mathrm{e}^{4ix} - 4\,\mathrm{e}^{3ix}\,\mathrm{e}^{-ix} + 6\,\mathrm{e}^{2ix}\,\mathrm{e}^{-2ix} - 4\,\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{-3ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix} - 4\,\mathrm{e}^{2ix} + 6 - 4\,\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left[\mathrm{e}^{4ix} + \mathrm{e}^{-4ix} - 4\left(\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{-2ix}\right) + 6\right] \\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin^4(x) = \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}.}$$

Vérification, si $x = 0$, on a $\sin^4(x) = 0$ et $\frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8} = \frac{1-4+3}{8} = 0$ OK !

3.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}
\cos^3(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3ix}+3\,\mathrm{e}^{2ix}\,\mathrm{e}^{-ix}+3\,\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{-2ix}+\mathrm{e}^{-3ix}\right)\frac{1}{-4}\left(\mathrm{e}^{2ix}-2\,\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{-ix}+\mathrm{e}^{-2ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32}\left(\mathrm{e}^{3ix}+3\,\mathrm{e}^{ix}+3\,\mathrm{e}^{-ix}+\mathrm{e}^{-3ix}\right)\left(\mathrm{e}^{2ix}-2+\mathrm{e}^{-2ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32}\left(\mathrm{e}^{5ix}-2\,\mathrm{e}^{3ix}+\mathrm{e}^{ix}+3\,\mathrm{e}^{3ix}-6\,\mathrm{e}^{ix}+3\,\mathrm{e}^{-ix}+3\,\mathrm{e}^{ix}-6\,\mathrm{e}^{-ix}+3\,\mathrm{e}^{-3ix}+\mathrm{e}^{-ix}-2\,\mathrm{e}^{-3ix}+\mathrm{e}^{-5ix}\right) \\
&= \frac{-1}{32}\left(2\cos(5x)-4\cos(3x)+2\cos(x)+6\cos(3x)-12\cos(x)+6\cos(-x)\right) \\
&= \frac{-1}{16}\left(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos^3(x)\sin^2(x) = \frac{2\cos(x)-\cos(5x)-\cos(3x)}{16}.}$$

Vérification : si $x=\frac{\pi}{3}$, *on a* $\cos^3(x)\sin^2(x) = \frac{1}{8}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{32}$ *et* $\frac{2\cos(x)-\cos(5x)-\cos(3x)}{16} = \frac{1-\frac{1}{2}-(-1)}{16} = \frac{3/2}{16} = \frac{3}{32}$ *OK !*

3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre, on a

$$\cos(5x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{5ix}\right) = \mathrm{Re}\left([\cos(x)+i\sin(x)]^5\right)$$

Or

$$\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2, \qquad (a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \mathrm{Re}\left(\cos^5(x)+5i\cos^4(x)\sin(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)\right. \\
&\qquad \left.-10i\cos^2(x)\sin^3(x)+5\cos(x)\sin^4(x)+i\sin^5(x)\right) \\
&= \cos^5(x)-10\cos^3(x)\sin^2(x)+5\cos(x)\sin^4(x).
\end{aligned}$$

De plus $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ et $\sin^4(x) = \left(1-\cos^2(x)\right)^2 = 1-2\cos^2(x)+\cos^4(x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \cos^5(x)-10\cos^3(x)+10\cos^5(x)+5\cos(x)-10\cos^3(x)+5\cos^5(x) \\
&= 16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(5x) = 16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x).}$$

Vérification : si $x=0$, $\cos(5x)=1$ *et* $16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x) = 16-20+5 = 1$ *OK !*

3.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}
\sin(4x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{4ix}\right) &= \mathrm{Im}\left[(\cos(x)+i\sin(x))^4\right] \\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^4(x)+4i\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4i\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x)\right) \\
&= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(4x) = 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x).}$$

Vérification : si $x = pi/6$, $\sin(4x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x) = 4\frac{3\sqrt{3}}{8}\times\frac{1}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *OK !*

3.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la factorisation par l'angle moitié, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{3ix}-2\cos(x)\,\mathrm{e}^{11ix} = \mathrm{e}^{2ix}\left(\mathrm{e}^{-ix}+\mathrm{e}^{ix}\right)-2\cos(x)\,\mathrm{e}^{11ix} &= 2\cos(x)\,\mathrm{e}^{2ix}-2\cos(x)\,\mathrm{e}^{11ix} \\
&= 2\cos(x)\left(\mathrm{e}^{2ix}-\mathrm{e}^{11ix}\right).
\end{aligned}$$

A nouveau, par la factorisation par l'angle moitié,

$$\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{3ix}-2\cos(x)\,\mathrm{e}^{11ix}=2\cos(x)\,\mathrm{e}^{i\frac{13x}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{9x}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{9x}{2}}\right)=-4i\cos(x)\sin\left(\frac{9x}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{13x}{2}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{3ix}-2\cos(x)\,\mathrm{e}^{11ix}=-4i\cos(x)\sin\left(\frac{9x}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{13x}{2}}.}$$

3.6 Soient $x\in\mathbb{R}$ et $z=\mathrm{e}^{ix}$. On a les calculs suivants

$$z^2+\overline{z}^4=\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^2+\left(\overline{\mathrm{e}^{ix}}\right)^4=\mathrm{e}^{2ix}+\left(\mathrm{e}^{-ix}\right)^4=\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{-4ix}.$$

Par la formule par l'angle moitié,

$$z^2+\overline{z}^4=\mathrm{e}^{-ix}\left(\mathrm{e}^{3ix}+\mathrm{e}^{-3ix}\right)=2\cos(3x)\,\mathrm{e}^{-ix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{z^2+\overline{z}^4=2\cos(3x)\,\mathrm{e}^{-ix}.}$$

4. **Equations complexes.**

4.1 Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz}\in\mathbb{R} \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{1-iz}{1+iz}=\overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)}\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{1-iz}{1+iz}=\frac{1+i\overline{z}}{1-i\overline{z}}\\
&\Leftrightarrow\quad (1-iz)(1-i\overline{z})=(1+i\overline{z})(1+iz) \qquad \text{car } z\neq i\\
&\Leftrightarrow\quad 1-iz-i\overline{z}-|z|^2=1+iz+i\overline{z}-|z|^2\\
&\Leftrightarrow\quad 0=2i(z+\overline{z})\\
&\Leftrightarrow\quad z=-\overline{z}.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$,

$$\boxed{\frac{1-iz}{1+iz}\in\mathbb{R}\qquad\Leftrightarrow\qquad z\in i\mathbb{R}\setminus\{i\}.}$$

Interprétation géométrique. Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$ on a

$$\frac{1-iz}{1+iz}=\frac{-i(z+i)}{i(z-i)}=-\frac{z+i}{z-i}.$$

Dès lors en posant $A(-i)$, $B(i)$ et $M(z)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz}\in\mathbb{R}\quad&\Leftrightarrow\quad -\frac{z+i}{z-i}\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{z+i}{z-i}\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad z+i=\lambda(z-i) \qquad \text{car } z\neq i\\
&\Leftrightarrow\quad \exists\lambda\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{BM}\\
&\Leftrightarrow\quad A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés}\\
&\Leftrightarrow\quad M\in(AB).
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est la droite (AB) privée du point B.

4.2 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz} = -\overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz} = -\frac{1+i\overline{z}}{1-i\overline{z}} \\
&\Leftrightarrow \quad (1-iz)(1-i\overline{z}) = -(1+i\overline{z})(1+iz) \qquad \text{car } z \neq i \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - iz - i\overline{z} - |z|^2 = -1 - iz - i\overline{z} + |z|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2 = 2|z| \\
&\Leftrightarrow \quad |z| = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\boxed{\frac{1-iz}{1+iz} \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}\,.}$$

Interprétation géométrique. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a

$$\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{-i(z+i)}{i(z-i)} = -\frac{z+i}{z-i}.$$

Dès lors en posant $A(-i)$, $B(i)$ et $M(z)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad z = -i \qquad \text{car } z \neq i \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad M = A \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{le triangle } ABM \text{ est rectangle en } M.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est le cercle de diamètre AB privé du point B.

4.3 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{U} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz} \times \overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz}\frac{1+i\overline{z}}{1-i\overline{z}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1+i\overline{z}-iz+|z|^2}{1-i\overline{z}+iz+|z|^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 1+i\overline{z}-iz+|z|^2 = 1-i\overline{z}+iz+|z|^2 \qquad \text{car } z \neq i \\
&\Leftrightarrow \quad 2i\overline{z} = 2iz \\
&\Leftrightarrow \quad z = \overline{z}.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\boxed{\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{U} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.}$$

Interprétation géométrique. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a

$$\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{-i(z+i)}{i(z-i)} = -\frac{z+i}{z-i}.$$

Dès lors en posant $A(-i)$, $B(i)$ et $M(z)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz}\in\mathbb{U} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{z+i}{z-i}\in\mathbb{U}\\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{z+i}{z-i}\right|=1\\
&\Leftrightarrow \quad |z+i|=|z-i| \qquad \text{car } z\neq i\\
&\Leftrightarrow \quad AM=BM.
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[AB]$.

4.4 Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{z-i}{z+1}\in\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{z+1}=\overline{\left(\frac{z-i}{z+1}\right)}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{z+1}=\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}+1}\\
&\Leftrightarrow \quad (z-i)(\overline{z}+1)=(\overline{z}+i)(z+1) \qquad \text{car } z\neq -1\\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2+z-i\overline{z}-i=|z|^2+\overline{z}+iz+i\\
&\Leftrightarrow \quad z-\overline{z}=i(z+\overline{z})+2i\\
&\Leftrightarrow \quad 2i\mathrm{Im}(z)=2i\mathrm{Re}(z)+2i\\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)+1.
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient une droite privée d'un point : pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$,

$$\boxed{\frac{z-i}{z+1}\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad z\in\{a+i(1+a)\mid a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}=\{b-1+ib\mid b\in\mathbb{R}^*\}.}$$

Interprétation géométrique. Posons $A(i)$ et $B(-1)$. Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, posons $M(z)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{z-i}{z+1}\in\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\quad z-i=\lambda(z+1) \qquad \text{car } z\neq -1\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{BM}\\
&\Leftrightarrow \quad A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés}\\
&\Leftrightarrow \quad M\in(AB).
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est la droite (AB) privée du point B.

4.5 Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-2\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{z-2i}{z+2}\in\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z-2i}{z+2}=\overline{\left(\frac{z-2i}{z+2}\right)}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z-2i}{z+2}=\frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}+2}\\
&\Leftrightarrow \quad (z-2i)(\overline{z}+2)=(\overline{z}+2i)(z+2) \qquad \text{car } z\neq -2\\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2+2z-2i\overline{z}-4i=|z|^2+2\overline{z}+2iz+4i\\
&\Leftrightarrow \quad 2(z-\overline{z})=2i(z+\overline{z})+8i\\
&\Leftrightarrow \quad 4i\mathrm{Im}(z)=4i\mathrm{Re}(z)+8i\\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)+2.
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient une droite privée d'un point : pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-2\}$,

$$\boxed{\frac{z-2i}{z+2}\in\mathbb{R} \quad\Leftrightarrow\quad z\in\{a+i(a+2)\mid a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\}=\{b-2+ib\mid b\in\mathbb{R}^*\}.}$$

Interprétation géométrique. Posons $A(2i)$ et $B(-2)$. Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-2\}$, posons $M(z)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{z-2i}{z+2}\in\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\quad z-2i=\lambda(z+2) \qquad \text{car } z\neq -2\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{BM}\\
&\Leftrightarrow \quad A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés}\\
&\Leftrightarrow \quad M\in(AB).
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est la droite (AB) privée du point B.

4.6 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-iz}{1+iz}\right| = \sqrt{2} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz} \times \overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)} = 2 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1-iz}{1+iz}\,\frac{1+i\overline{z}}{1-i\overline{z}} = 2 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1+i\overline{z}-iz+|z|^2}{1-i\overline{z}+iz+|z|^2} = 2 \\
& \Leftrightarrow \quad 1+i\overline{z}-iz+|z|^2 = 2-2i\overline{z}+2iz+2|z|^2 \qquad \text{car } z \neq i \\
& \Leftrightarrow \quad 0 = 1+3i(z-\overline{z})+|z|^2 \\
& \Leftrightarrow \quad |z|^2 - 6\mathrm{Im}(z) + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Posons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Alors

$$\left|\frac{1-iz}{1+iz}\right| = \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2+b^2-6b+1=0.$$

On met alors cette expression polynomiale du second degré sous forme canonique en remarquant que b^2-6b est le début du carré $(b-3)^2$:

$$\left|\frac{1-iz}{1+iz}\right| = \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2+(b-3)^2-9+1=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2+(b-3)^2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2.$$

On reconnait alors l'équation du cercle de centre $(0,3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-3i| = 2\sqrt{2} \right\}.}$$

NB : inutile d'enlever i car il n'est pas sur le cercle.

4.7 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{z+1} = -\overline{\left(\frac{z-i}{z+1}\right)} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{z+1} = -\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}+1} \\
& \Leftrightarrow \quad (z-i)(\overline{z}+1) = -(\overline{z}+i)(z+1) \qquad \text{car } z \neq -1 \\
& \Leftrightarrow \quad |z|^2 + z - i\overline{z} - i = -|z|^2 - \overline{z} - iz - i \\
& \Leftrightarrow \quad 2|z|^2 + z + \overline{z} + i(z-\overline{z}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 2|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) - 2\mathrm{Im}(z) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad |z|^2 + \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = 0.
\end{aligned}$$

Posons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} \quad & \Leftrightarrow \quad a^2+b^2+a-b=0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On reconnait alors l'équation du cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|z - \frac{-1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \setminus \{-1\}.}$$

Interprétation géométrique. Posons $A(i)$ et $B(-1)$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, posons $M(z)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-i}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad z = i \qquad \text{car } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad M = A \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{le triangle } ABM \text{ est rectangle en } M. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est le cercle de diamètre AB privé du point B.

4.8 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z+2} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z-2i}{z+2} = -\overline{\left(\frac{z-2i}{z+2}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{z-2i}{z+2} = -\frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}+2} \\ &\Leftrightarrow \quad (z-2i)(\overline{z}+2) = -(\overline{z}+2i)(z+2) \\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2 + 2z - 2i\overline{z} - 4i = -|z|^2 - 2\overline{z} - 2iz - 4i \qquad \text{car } z \neq -2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2|z|^2 + 2(z+\overline{z}) + 2i(z-\overline{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) - 2\mathrm{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) - 2\mathrm{Im}(z) = 0. \end{aligned}$$

Posons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z+2} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + 2a - 2b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a+1)^2 - 1 + (b-1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a+1)^2 + (b-1)^2 = 2. \end{aligned}$$

On reconnait alors l'équation du cercle de centre $(-1, 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - (-1+i)| = \sqrt{2} \right\} \setminus \{-2\}.}$$

Interprétation géométrique. Posons $A(2i)$ et $B(-2)$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$, posons $M(z)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z+2} \in i\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-2i}{z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad z = 2i \qquad \text{car } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad M = A \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{le triangle } ABM \text{ est rectangle en } M. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est le cercle de diamètre AB privé du point B.

5. **Inéquations trigonométriques.**

5.1 Soit $x \in [0; \pi]$. On a les équivalences suivantes :

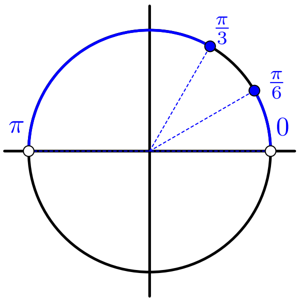
$$\begin{aligned} \cos(x) - \cos(3x) \leqslant \sqrt{3}\sin(x) \quad &\Leftrightarrow \quad -2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-3x}{2}\right) \leqslant \sqrt{3}\sin(x) \\ &\Leftrightarrow \quad 2\sin(2x)\sin(x) \leqslant \sqrt{3}\sin(x) \qquad \text{car le sinus est impair} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \,]0;\pi[\\ 2\sin(2x) \leqslant \sqrt{3} \end{cases} \qquad \text{car } \forall u \in \,]0;\pi[\,,\ \sin(u) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \,]0;\pi[\\ \sin(2x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

On note que lorsque $x \in]0;\pi[$ alors $2x \in]0;2\pi[$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\cos(x)-\cos(3x)\leqslant\sqrt{3}\sin(x) &\Leftrightarrow \begin{cases}x\in]0;\pi[\\ 0<2x\leqslant\frac{\pi}{3}\ \text{ OU }\ \frac{2\pi}{3}\leqslant 2x<2\pi\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x\in]0;\pi[\\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{6}\ \text{ OU }\ \frac{\pi}{3}\leqslant x<\pi\end{cases}\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a

$$\boxed{\cos(x)-\cos(3x)\leqslant\sqrt{3}\sin(x) \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left]0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3};\pi\right[.}$$

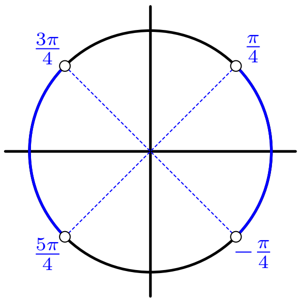


5.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\cos^2(x)>\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos(x)>\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{OU}\quad\cos(x)<-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad\text{OU}\quad\frac{3\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi.\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\cos^2(x)>\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right[.}$$

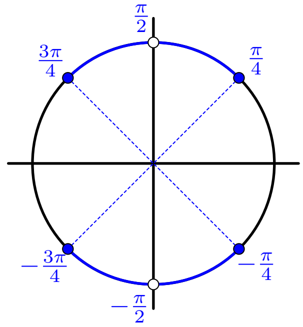


5.3 Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\tan^2(x)-1\geqslant 0 &\Leftrightarrow \tan^2(x)\geqslant 1\\ &\Leftrightarrow \tan(x)\geqslant 1\quad\text{OU}\quad\tan(x)\leqslant -1\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\quad x\in\left[\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad\text{OU}\quad x\in\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi\right].\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$, on a

$$\boxed{\tan^2(x)-1\geqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[.}$$



5.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) + \sin(3x) > \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x)\right) > \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(3x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(3x) > 1 \qquad \text{car } \sqrt{2} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1.
\end{aligned}$$

Or le cosinus est majoré sur $\mathbb{R}$ par 1. $\boxed{\text{Cette équation n'admet donc aucune solution.}}$

5.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. En linéarisant on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \cos^2(x) + 4\sin(x)\cos(x) - 3\sin^2(x) < \sqrt{2} - 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1+\cos(2x)}{2} + 2\sin(2x) - 3\frac{1-\cos(2x)}{2} < \sqrt{2} - 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\sin(2x) + \frac{4\cos(2x) - 2}{2} < \sqrt{2} - 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\sin(2x) + 2\cos(2x) - 1 < \sqrt{2} - 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right) < \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x) < \frac{1}{2} \qquad \text{car } 2\sqrt{2} > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{7\pi}{12} + 2k\pi < 2x < \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{7\pi}{24} + k\pi < x < \frac{23\pi}{24} + k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos^2(x) + 4\sin(x)\cos(x) - 3\cos^2(x) < \sqrt{2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{7\pi}{24} + k\pi; \frac{23\pi}{24} + k\pi\right[.}$$