Déterminants

Dans tout le chapitre, E ***désigne un*** K***-espace vectoriel de dimension*** $n \in \mathbb{N}^*$ ***et*** $K = \mathbb{R}$ ***ou*** $\mathbb{C}$***.***

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1 : Une application $f : E^n \to K$ est dite **forme** $n-$**linéaire alternée** sur E si elle vérifie les deux points suivants :
• Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et tout $(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in E^{n-1}$, l'application partielle
$f_i : t \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)$ est linéaire.
• Pour tout $(x_k)_{k\in[\![1;n]\!]} \in E^n$, s'il existe $(i, j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, alors :
$x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = 0$.

Exemple : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y$ est alternée.

Proposition 1 : (admise) *Soit f une forme n-linéaire alternée sur E et $(x_k)_{k\in[\![1;n]\!]} \in E^n$.*
Si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée, alors $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.

Proposition 2 : *(**Antisymétrie**) Soit f une forme n-linéaire alternée sur E et $(x_k)_{k\in[\![1;n]\!]} \in E^n$.*

$$i \neq j \Rightarrow f(x_1, x_2, ..., x_{\mathbf{i}}, ..., x_{\mathbf{j}}, ..., x_n) = -f(x_1, x_2, ..., x_{\mathbf{j}}, ..., x_{\mathbf{i}}, ..., x_n)$$

Démonstration : ....

Proposition 3 : *(**Invariance**) Soit f une forme n-linéaire alternée sur E et $(x_k)_{k\in[\![1;n]\!]} \in E^n$. On ne change pas la valeur de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ si l'on ajoute à l'un des éléments x_i une combinaison linéaire des autres éléments.*

Démonstration : ....

Théorème 1 : (admis) *Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de E. Il existe une et une seule forme n-linéaire alternée telle que $f(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$.*
*Cette application s'appelle **déterminant** dans la base $\mathcal{B}$ et on la note $\det_{\mathcal{B}}$.*

1.2 Cas particuliers des dimensions 2 et 3

Proposition 4 : *Soit $\mathcal{B}$ une base de E de dimension 2. Soit $(x, y) \in E^2$ de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans la base $\mathcal{B}$. Alors :*

$$det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

.

Démonstration : ....

Remarque : On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Alors $|det_{\mathcal{B}}(u, v)|$ est l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v.

Proposition 5 : *Soit $\mathcal{B}$ une base de E de dimension 3. Soit $(x, y, z) \in E^3$ de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) dans la base $\mathcal{B}$. Alors :*

$$det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2$$

Démonstration : ....

Remarque : Pour retenir cette règle de Sarrus, on peut utiliser le schéma suivant :

....

....

....

Remarque : On se place dans le plan $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique. Soit $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$. Alors $|det_{\mathcal{B}}(u, v, w)|$ est le volume du parallélépipède défini par les vecteurs u, v et w.

1.3 Propriétés

Proposition 6 : *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f une forme n- linéaire alternée de E^n dans K. Alors f est un multiple de $det_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration : ....

Proposition 7 : *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, alors les applications n-linéaires alternées $det_{\mathcal{B}}$ et $det_{\mathcal{B}'}$ sont liées par :*

$$det_{\mathcal{B}'} = det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) det_{\mathcal{B}}$$

Démonstration : ....

Proposition 8 : *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors :*

$$\mathcal{F} \ \ est \ \ une \ \ base \ \ de \ \ E \Leftrightarrow det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

Démonstration : ....

Exemple : La famille $((1,2,0),(1,0,1),(1,1,4))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

....

....

....

....

2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 2 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. La valeur $det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle* **déterminant de** *f et on le note $det(f)$.*

Démonstration : ....

Exemple : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, alors $det(Id_E) = det_{\mathcal{B}}(Id_E(\mathcal{B})) = det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Proposition 9 : *Soit $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$. Alors :*

$$det(f \circ g) = det(f) \times det(g)$$

Démonstration : ....

Proposition 10 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$f \ \ est \ \ un \ \ automorphisme \ \ de \ \ E \Leftrightarrow det(f) \neq 0$$

Dans ce cas, on a de plus : $det(f^{-1}) = \dfrac{1}{det(f)}$.

Démonstration : ....

3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle **déterminant de** A le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de K^n, que l'on note $det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Remarque : Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. La définition du déterminant d'un endomorphisme donne alors directement
$det(f) = det(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.

Proposition 11 : *Soit* $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(K))^2$ *et* $\lambda \in K$.

- $det(I_n) = 1$
- $det(AB) = det(A) \times det(B)$
- $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
- A *est inversible* $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$ *et dans ce cas,* $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$
- $det(A^T) = det(A)$ *(admis)*

Démonstration : ....

4 Calcul des déterminants

Proposition 12 : *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$. *Soit* $(i, j) \in ([\![1; n]\!])^2$ *avec* $i \neq j$ *et soit* $\lambda \in K^*$.

- *Les opérations élémentaires* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *ne modifient pas* $det(A)$.
- *Les opérations élémentaires* $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *multiplient* $det(A)$ *par* λ.
- *Les opérations élémentaires* $L_i \longleftrightarrow L_j$ et $C_i \longleftrightarrow C_j$ *multiplient* $det(A)$ *par -1.*

Démonstration : ....

Proposition 13 : *Soit* $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *une matrice triangulaire de* $\mathcal{M}_n(K)$. *Alors :*

$$det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}$$

Démonstration : ....

Exemple : Calculer $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Proposition 14 : (admise) (***Développement par ligne ou colonne***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$. On pose $\Delta_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i-$ième ligne et la j-ième colonne. Alors :

- *en développant par rapport à la i-ième ligne, on obtient : $det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(\Delta_{i,j})$.*
- *en développant par rapport à la j-ième colonne, on obtient : $det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(\Delta_{i,j})$.*

Exemple : Calculer $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.