Espaces préhilbertiens

1 Produit scalaire

1.1 Forme bilinéaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1 : Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que φ est une **forme bilinéaire** si pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z)$$

$$\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, z)$$

Remarque : On demande en fait qu'une application bilinéaire soit linéaire par rapport à chacune de ces variables.

Définition 2 : Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que φ est **symétrique** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

Exemples : 1) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on considère l'application φ définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt$$

Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}[X]$.

....

....

....

....

....

....

2) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère l'application φ définie par :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\; et \;\; \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$$

Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$.

....

....

....

....

....

Proposition 1 : *Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, on a alors :*

- $\forall x \in E, \varphi(x, 0_E) = 0$
- $\varphi(0_E, x) = 0$
- $\varphi(0_E, 0_E) = 0$

Démonstration : ....

Définition 3 : Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.
- On dit que φ est **positive** si : $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geq 0$.
- On dit que φ est **définie positive** si φ est positive et si $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow\ x = 0_E$.

Exemple : Reprendre les deux exemples précédents et regarder si les formes bilinéaires φ sont définies positives.

....

....

....

....

....

....

....

1.2 Produit scalaire

Définition 4 : Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que φ est un **produit scalaire** sur E si φ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.

Remarque : Plusieurs notations sont utilisées pour écrire un produit scalaire, on écrit $\varphi(x, y)$, mais très souvent, on préfère écrire : $\langle x, y \rangle$, $\langle x \mid y \rangle$, $(x \mid y)$ ou encore $x \cdot y$.

Ces écritures se lisent « x *scalaire* y ».

Exemple : Les deux exemples précédents sont en fait, des produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{R}^2$.

Avec ces produits scalaires ainsi définis, calculer :

Dans $\mathbb{R}[X]$, $\varphi(X, X^2) =$ ....

Dans $\mathbb{R}^2$, $\varphi\big((2, 1)\,,\, (1, -3) \big) =$ ....

Définition 5 : Un **espace préhilbertien** est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur lequel un produit scalaire a été défini.
Un espace préhilbertien de dimension finie est appelé un **espace euclidien**.

Exemple : Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère deux vecteurs x et y de E , calculer $\langle x+y, x-y \rangle$.

....

....

....

1.3 Exemples de produits scalaires

1.3.1 Sur $\mathbb{R}^n$

<u>Définition 6</u> : Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit le **produit scalaire canonique** de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, quel est le produit scalaire des vecteurs $u = (-2, 1, 0, 2)$ et $v = (1, -1, 3, 2)$?

....

....

Remarque : On dispose aussi d'une écriture matricielle du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, si l'on note X et Y les matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique, on a alors :

$$\langle x, y \rangle = X^\top Y$$

En effet, $X^\top Y$ est une matrice 1×1, on cherche alors l'expression de son unique coefficient.

....

....

1.3.2 Produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Voici encore deux exemples de produits scalaires fréquemment rencontrés, tous deux sont définis par des intégrales.

Exemple : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2$, on pose : $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple : Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_a^b \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt$
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

. . . .

. . . .

2 Norme associée à un produit scalaire

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2.1 Norme et distance

Définition 7 : Soit $x \in E$, on appelle **norme** du vecteur x le réel $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Remarque : Il est tout à fait légitime de prendre une racine carrée, un produit scalaire étant une forme bilinéaire positive, on a $\langle x, x\rangle \geq 0$, pour tout $x \in E$.

Proposition 2 : • *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a :* $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$
• *Soit $x \in E$, on a l'équivalence suivante :* $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_E$

Démonstration : . . . .

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, quelle est la norme du vecteur $u = (-2, 1, 0, 2)$?

. . . .

. . . .

Proposition 3 : *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :*

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$
- $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y\rangle$
- $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

Démonstration : . . . .

Définition 8 : Soit $(x,y) \in E^2$, on appelle **distance** entre les vecteurs x et y le réel $d(x,y) = \|x-y\|$.

2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 : *(**Inégalité de Cauchy-Schwarz**) Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a : $\left|\langle x,y\rangle\right| \leq \|x\| \times \|y\|$.*
De plus, l'inégalité ci-dessus est une égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Démonstration : ....

Exemples : 1) Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, montrer que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

....

....

....

....

....

2) Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$, montrer que :

$$\left|\int_0^1 fg\right| \leq \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 g^2\right)^{1/2}$$

....

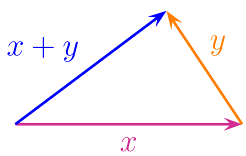
....

....

....

Théorème 2 : *(**Inégalité triangulaire**) Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*
De plus l'inégalité ci-dessus est une égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de même sens.

Démonstration : ....



3 Orthogonalité

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3.1 Vecteurs orthogonaux

<u>Définition 9</u> : Soit $(x, y) \in E^2$, on dit que x et y sont **orthogonaux** lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, on pose pour tout $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$, $\quad u \cdot v = xx' - xy' - yx' + 2yy'$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $u = (2, 2)$ et $v = (1, 0)$, montrer que u et v sont orthogonaux (pour le produit scalaire $\cdot$)

....

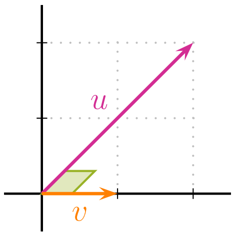
....

....

....

....

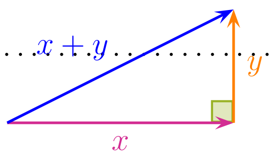
....



Théorème 3 : *Soit $(x, y) \in E^2$, on a l'équivalence suivante :*

$$x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration : ....



3.2 Familles orthogonales, orthonormales

<u>Définition 10</u> : Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E, on dit que :
- $\mathcal{F}$ est une **famille orthogonale** si pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.
- $\mathcal{F}$ est une **famille orthonormée** (ou **orthonormale**) si $\mathcal{F}$ est orthogonale et si $\mathcal{F}$ est constituée de **vecteurs unitaires** c'est-à-dire de norme égale à 1.

Proposition 4 : *Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.*

Démonstration : ....

3.3 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

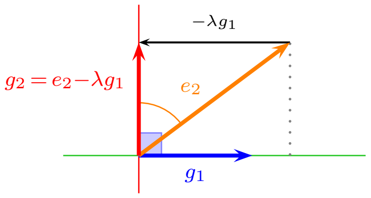
Cet algorithme permet de construire, à partir d'une famille libre $(e_1, e_2, ..., e_p)$, une famille $(g_1, g_2, ..., g_p)$ **orthogonale**, puis une famille $(n_1, n_2, ..., n_p)$ **orthonormée** telles que :

$$Vect(e_1, e_2, ..., e_p) = Vect(g_1, g_2, ..., g_p) = Vect(n_1, n_2, ..., n_p)$$

· 1$^{\text{re}}$ **étape :** On pose $g_1 = e_1$.

· 2$^{\text{e}}$ **étape :** Construction de g_2.

Le vecteur e_2 n'étant pas forcément orthogonal à g_1, on va construire un vecteur g_2 qui le soit. L'idée est de retrancher à e_2 une composante colinéaire à g_1 pour en quelque sorte le *redresser* et le rendre orthogonal.



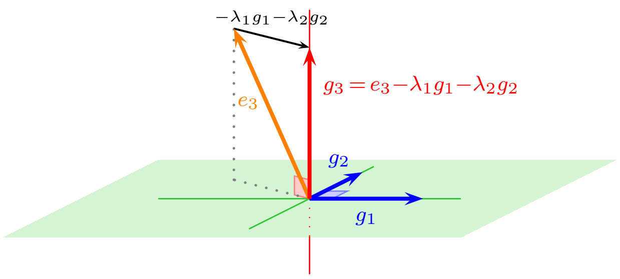
On pose :

$$g_2 = e_2 - \lambda g_1$$

et on détermine λ pour que $\langle g_2, g_1 \rangle = 0$.

· 3$^{\text{e}}$ **étape :** Construction de g_3.

De même, on retranche à e_3 une composante parallèle au plan (g_1, g_2) pour le rendre orthogonal.



On pose :

$$g_3 = e_3 - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$$

et on détermine λ_1 pour que $\langle g_3, g_1 \rangle = 0$ et λ_2 pour que $\langle g_3, g_2 \rangle = 0$.

· **Étapes suivantes :**

On recommence ainsi pour construire tous les autres vecteurs de la famille orthogonale, on pose donc :

$$g_i = e_i - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - ... - \lambda_{i-1} g_{i-1}$$

et on calcule les différents coefficients λ_k pour que $\langle g_i, g_k \rangle = 0$ ($k \in [\![1; i-1]\!]$).

· **Dernière étape :**

La famille orthogonale $(g_1, g_2, ..., g_p)$ est donc construite, pour en déduire la famille orthonormée $(n_1, n_2, ..., n_p)$, il suffit simplement de diviser chaque vecteur par leur norme.

On pose donc :

$$\forall i \in [\![1;p]\!], n_i = \frac{g_i}{\|g_i\|}$$

Exemple : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt$$

1. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\langle X^i, X^j \rangle$
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$, pour obtenir une famille orthonormée (n_1, n_2, n_3) telle que $Vect(n_1, n_2, n_3) = \mathbb{R}_2[X]$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3.4 Base orthogonale, base orthonormée

Ici, E désigne un espace euclidien, donc un espace de dimension finie admettant une base.

Bien évidemment, on appelle base orthogonale toute base de E constituée par une famille orthogonale, une base orthonormée étant une base de E constituée par une famille orthonormée.

Proposition 5 : *Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède une base orthonormée.*

Démonstration : L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une base orthonormée à partir d'une base.

Théorème 4 : *(**Théorème de la base incomplète**) Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E peut se compléter en une base orthonormée de E.*

Démonstration : On utilise le théorème de la base incomplète puis l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Lorsque l'on travaille avec une BON, il est facile de trouver les coordonnées d'un vecteur quelconque, notons $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien E.

Théorème 5 : *Les coordonnées de tout vecteur x de E dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ sont données par :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Démonstration : ....

Soit x et y deux vecteurs de E, notons alors X et Y les matrices colonnes des coordonnées de ces deux vecteurs dans la base orthonormée $\mathcal{B}$. D'après le théorème précédent, on a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y, e_1 \rangle \\ \langle y, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

On dispose alors du théorème suivant permettant de calculer le produit scalaire et la norme.

Théorème 6 : ***(Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée)***
Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y \quad et \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = X^T X$$

Démonstration : Découle directement du théorème précédent.

4 Projection orthogonale sur un sous-espace

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4.1 Orthogonal d'une partie

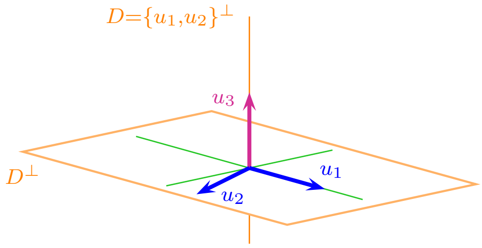
Définition 11 : Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E, on appelle **orthogonal** de A, l'ensemble noté $A^\perp$, formé des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$$

Proposition 6 : *Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertion E, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration : ....

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, 2, 1)$, déterminer $D = \{u_1, u_2\}^{\perp}$.



....

....

....

....

....

....

4.2 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Théorème 7 : *Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.*

- $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$
- *Si F est de dimension finie, alors :* $\quad E = F \oplus F^{\perp} \quad$ *et* $\quad F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$
- *Si de plus E est un espace de dimension finie donc un espace euclidien, on a :*

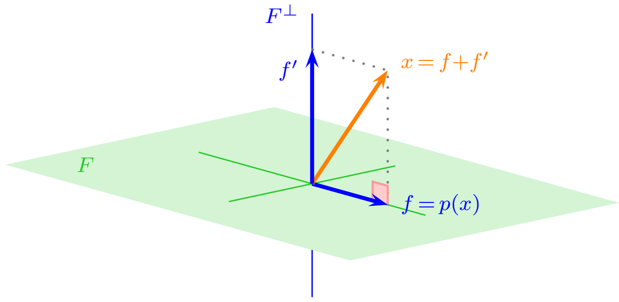
$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$$

Démonstration : ....

***Remarque* :** On a toujours $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, mais si F n'est pas un espace de dimension finie, il est possible de trouver des exemples où $F \neq \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

4.3 Projection orthogonale

<u>Définition 12</u> : Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée **projection orthogonale** sur F.



<u>Comment déterminer le projeté orthogonal $p(x)$</u> ?

Bien se rappeler que $p(x)$, le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace F est caractérisé par deux choses :

$$p(x) \in F \qquad et \qquad x - p(x) \in F^\perp$$

Ces deux conditions donnent une première méthode pour déterminer le projeté.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2)$ et $u = (1, 2, 0)$. Déterminer le projeté orthogonal $p(u)$ de u sur le sous-espace $H = Vect(u_1, u_2)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Théorème 8 : *Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E possédant une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$. Soit $x \in E$, notons $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur F, on a :*

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Démonstration : . . . .

Comment déterminer le projeté orthogonal $p(x)$?

Si l'on connait une base orthonormée du sous-espace F, le théorème précédent donne une deuxième méthode pour déterminer le projeté.

Exemple : Dans $\mathcal{C}[0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$.
Déterminer le projeté orthogonal de Id sur $F = Vect(\sin, \cos)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4.4 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 13 : Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$.
On appelle **distance de x à F** le réel noté $d(x, F)$ défini par :

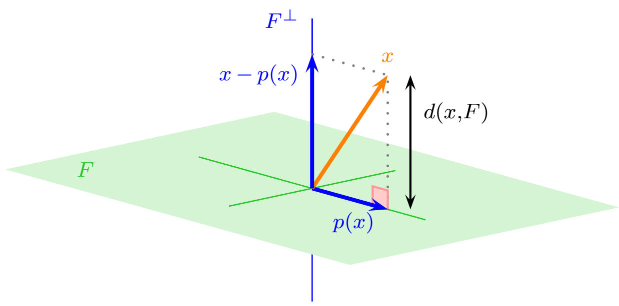
$$d(x,F) = \inf\left\{\|x-a\|, a \in F\right\} = \inf_{a\in F} \|x-a\|$$

Remarque : Cette borne inférieure existe car $\left\{\|x-a\|, a \in F\right\}$ est non vide et minoré par 0.

Théorème 9 : *Le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.*

$$d(x,F) = \|x - p(x)\|$$

Démonstration : ....



4.5 Projection sur un hyperplan, distance à un hyperplan

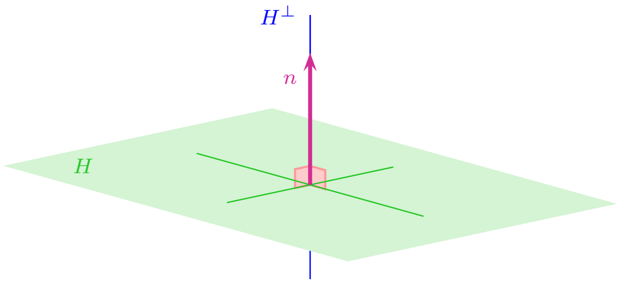
Dans cette partie, E désigne un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle ., . \rangle$.

4.5.1 Vecteur normal à un hyperplan

Définition 14 : Soit E un espace euclidien et H un sous-espace vectoriel de E, on a :

$$H \text{ est un hyperplan de } E \Leftrightarrow \exists n \in E, n \text{ non nul, tel que } H = \{n\}^{\perp} = \{x \in E \mid \langle x, n \rangle = 0\}$$

Dans ce cas, un tel vecteur n est appelé un **vecteur normal** à H



4.5.2 Projection sur un hyperplan

Théorème 10 : *Soit H un hyperplan de vecteur normal n, on suppose que n est un vecteur unitaire, c'est-à-dire que $\|n\| = 1$. L'expression du projeté orthogonal $p(x)$ sur H d'un vecteur x de E est donnée par :*

$$p(x) = x - \langle x, n \rangle n$$

Démonstration : . . . .

4.5.3 Distance à un hyperplan

Théorème 11 : *Soit H un hyperplan de vecteur normal n, on suppose que n est un vecteur unitaire, c'est-à-dire que $\|n\| = 1$. La distance d'un vecteur x à H se calcule par :*

$$d(x, H) = \left| \langle x, n \rangle \right|$$

Démonstration : . . . .