Fonctions à deux variables

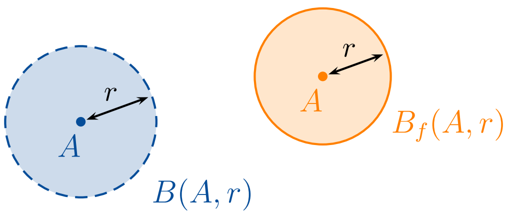
Dans tout le chapitre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne associée, on a donc :

$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$ et $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

1.1 Boules ouvertes et fermées

Définition 1 : Soit $A \in \mathbb{R}^2$.
• Soit $r > 0$, on appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r, l'ensemble :
$B(A, r) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \mid \|M - A\| < r \right\}$
• Soit $r \geq 0$, on appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r, l'ensemble :
$B_f(A, r) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \mid \|M - A\| \leq r \right\}$

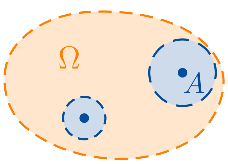


On sait d'après le chapitre "Espaces préhilbertiens", que la norme $\|M - A\|$ est la distance entre les points A et M, une boule semble plutôt être un disque du plan !

Pour une boule fermée, le bord du disque est inclus, alors qu'une boule ouverte est privée de son bord.

1.2 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition 2 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on dit que Ω est un **ouvert** si : $\forall A \in \Omega$, $\exists r > 0$ tel que $B(A, r) \subset \Omega$



 *Exemples* : 1) Une boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $A \in B(O,\rho)$, on pose :

$$r = \frac{1}{2}(\rho - \|A - O\|)$$

On montre alors que : $B(A,r) \subset B(O,\rho)$

....

....

....

....

2) Les ensembles suivants sont-ils des ouverts de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B}_f((2,-1),\dfrac{1}{2})$?]0,1[×]0,1[? [-2,2]×[-5,3] ?

....

....

....

....

1.3 Fonctions de deux variables

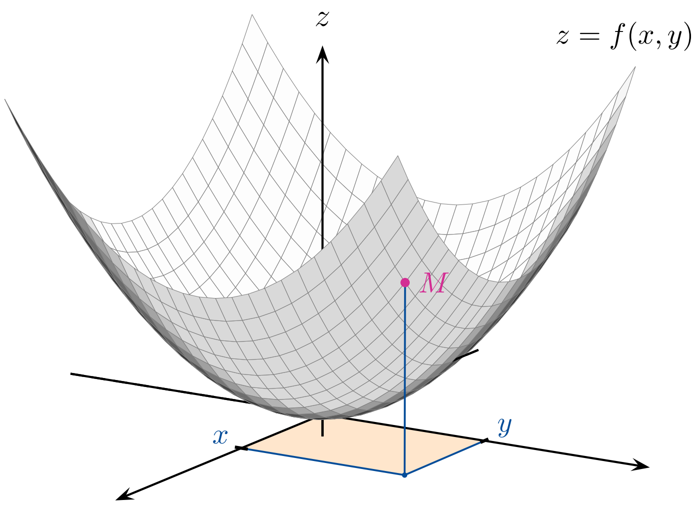
On s'intéresse dans ce chapitre à des fonctions de deux variables, ce sont des fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Pour bien comprendre les notions de continuité et de différentiabilité que l'on doit étudier, il est important d'avoir une représentation graphique d'une telle fonction.

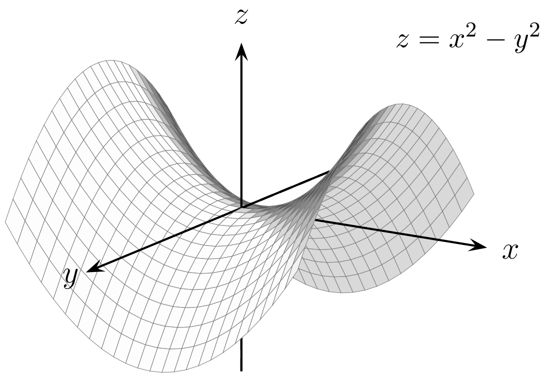
On considère l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées $\big(x, y, f(x,y)\big)$, $(x,y) \in \Omega$.
Cet ensemble constitue une représentation de la fonction f dans l'espace, la forme obtenue est ce que l'on appelle, une surface de $\mathbb{R}^3$, on parle dans ce cas de la surface d'équation $z = f(x,y)$.

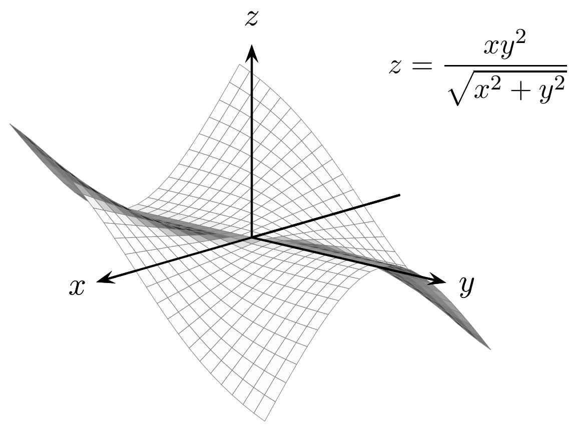
Voici par exemple, la représentation graphique de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$.



Dans l'espace, le point M de la surface a pour coordonnées $\big(x, y, f(x,y)\big)$.
Pour bien comprendre cette représentation graphique des fonctions de deux variables, on peut imaginer que $f(x,y)$ représente la « hauteur » ou l'« altitude » des points.

Voici deux autres exemples :





2 Continuité d'une fonction de deux variables

<u>Définition 3</u> : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on considère une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
• Soit $A \in \Omega$, on dit que f est **continue en** A si
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que $\forall X \in \Omega,\ \|X - A\| \leq \alpha \Rightarrow \big|f(X) - f(A)\big| \leq \varepsilon$
• On dit que f est **continue sur** Ω si f est continue en tout point A de Ω.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big|f(x,y) - f(0,0)\big| \leq \|(x,y)\|^2$

....

....

....

....

....

2. Étudier la continuité en $(0,0)$ de f.

....

....

....

....

....

....

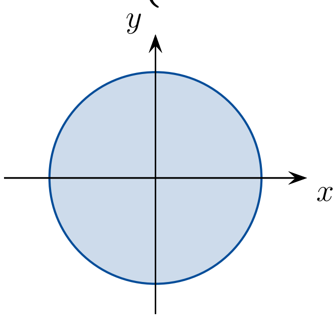
Méthode : Un résultat pratique pour étudier la continuité :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x| \leq \|(x, y)\| \quad$ et $\quad |y| \leq \|(x, y)\|$

On a en effet : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \leq x^2 + y^2$, donc $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$.

Exemple : Étudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



2.1 Opérations sur les fonctions continues

> Définition 4 : On appelle **fonction polynomiale de deux variables**, toute combinaison linéaire de fonctions de la forme : $(x, y) \longmapsto x^m y^n$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Exemple : Les fonctions : $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$, $\quad (x, y) \longmapsto xy$, $\quad (x, y) \longmapsto 1 - x^2 y + 3xy$ sont polynomiales.

Proposition 1 : *(admise)*

• *Toute fonction polynomiale est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

• *Toute combinaison linéaire, tout produit et tout quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *est une fonction continue sur* Ω.

• *Si* g *est une fonction continue sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *à valeurs dans un intervalle* I, *si* φ *est une application continue de* I *dans* $\mathbb{R}$, *alors la composée* $f = \varphi \circ g$ *est une fonction continue sur* Ω.

Exemples : 1) Montrer que $f : (x, y) \longmapsto \|(x, y)\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

....

....

....

....

....

2) Montrer que $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

....

....

....

....

....

3 Dérivées partielles, fonctions de classe C^1

Dans toute cette partie, on considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et une fonction f définie de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

3.1 Dérivées partielles

Définition 5 : Soit $A = (x_A, y_A) \in \Omega$, on dit que :

- f admet une **dérivée partielle par rapport à** x en A, lorsque l'application partielle $f(\cdot, y_A)$ est dérivable en x_A, le nombre dérivée est alors noté : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A)$
- f admet une **dérivée partielle par rapport à** y en A, lorsque l'application partielle $f(x_A, \cdot)$ est dérivable en y_A, le nombre dérivée est alors noté : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A)$

On a donc un lien entre les dérivées partielles et les taux d'accroissement des fonctions partielles, on peut écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) = \lim_{x \to x_A} \frac{f(x, y_A) - f(x_A, y_A)}{x - x_A} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) = \lim_{y \to y_A} \frac{f(x_A, y) - f(x_A, y_A)}{y - y_A}$$

Exemple : Étudier l'existence de dérivées partielles en $(1, \pi)$ de la fonction $f(x,y) = x^2 \cos y$

....

....

....

....

....

....

L'existence de dérivées partielles en un point N'ENTRAINE PAS la continuité de la fonction en ce point.

Exemple : On reprend l'exemple précédent (haut de la page 4), étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$.

....

....

Méthode : Dans la pratique, comme les définitions des dérivées partielles reposent sur l'étude des taux d'accroissement des fonctions partielles

• Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on dérive la fonction en considérant y comme une constante.

• Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on dérive la fonction en considérant x comme une constante.

Exemple : Déterminer les dérivées partielles de la fonction définie par $f(x, y) = xe^{xy^2}$.

....

....

3.2 Fonctions de classe C^1

On considère toujours un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et une fonction f définie de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Définition 6</u> : On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur Ω si f possède des dérivées partielles sur Ω et si celles-ci sont continues sur Ω. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω est noté : $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Théorème 1 : *(admis) Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω est continue sur Ω.*

Proposition 2 : *(admise)*

• *Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*

• *Toute combinaison linéaire, tout produit et tout quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.*

• *Si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans un intervalle I, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$, alors la composée $f = \varphi \circ g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.*

Exemple : 1) Montrer que $f : (x, y) \longmapsto \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

....

....

....

....

....

2) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3.3 Développement limité d'ordre 1

On considère toujours un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et une fonction f définie de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 2 : *(admis) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors pour tout $A = (x_A, y_A) \in \Omega$, f admet un développement limité d'ordre 1 en A de la forme :*

$$f(x_A + h, y_A + k) \underset{\|(h,k)\| \to 0}{=} f(x_A, y_A) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) + \circ(\|(h,k)\|)$$

Exemple : Soit $f(x,y) = \sin(x)e^{x^2y} + arctan(xy)$. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $(2, \frac{1}{2})$ puis de $(0,0)$.

....

....

....

....

....

....

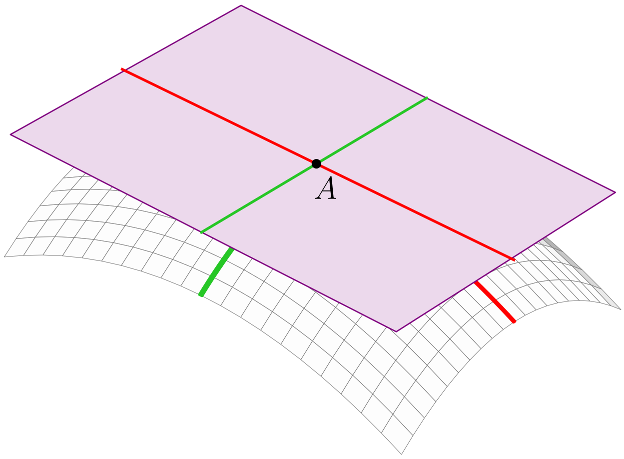
....

....

....

Définition 7 : Soit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Soit $A = (x_A, y_A) \in \Omega$, le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation :
$$z = f(x_A, y_A) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A)(x - x_A) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A)(y - y_A)$$
est appelé **plan tangent** de f en A.

Voici un exemple de représentation d'un plan tangent à une surface en un point A :



Exemple : Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

1) Donner l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $(2{,}1{,}\frac{3}{2})$ puis en un point (x_0, y_0, z_0) quelconque de $\mathcal{S}$.

2) Donner les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent passe par O.

....

....

....

....

....

....

....