Séries numériques

Dans tout le chapitre, $K = \mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$.

1 Définitions

Définition 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres. On appelle **série** de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

....

....

....

....

• Pour tout entier naturel n, u_n est appelé le terme général d'indice n de la série et S_n la somme partielle de rang n.

• On note $\sum_{n\geq 0} u_n$ la série de terme général u_n. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\geq 0} u_n$.

• On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge quand la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La limite de cette suite est alors appelée somme de la série et est notée : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Définition 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors on appelle **reste** d'ordre n de la série la valeur : $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1 : *(admise) La série à termes complexes $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si, et seulement si, les deux séries à termes réels $\sum_{n\geq 0} Re(u_n)$ et $\sum_{n\geq 0} Im(u_n)$ sont convergentes et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(u_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} Im(u_n)$$

2 Exemples de séries usuelles

2.1 Somme télescopique

Proposition 2 : *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - u_{n+1}$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge si et seulement si la suite u converge.*

En cas de convergence, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = u_0 - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration : ....

Exemple : Etudier la nature de $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

....

....

....

....

2.2 Série géométrique

Proposition 3 : *Soit q un complexe. La série de terme général q^n converge, si et seulement si, $|q|<1$, et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration : ....

Exemple : Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 4^{-k}$.

....

....

....

....

....

....

....

2.3 Séries géométriques dérivées

Proposition 4 : *(admise) Soit q un réel tel que $|q|<1$. Alors,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

....

....

....

....

Exemples : 1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k(\frac{1}{3})^k$.

....

....

....

....

....

....

2) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k}$.

....

....

....

....

....

....

....

2.4 Série exponentielle

Théorème 1 : *Pour tout complexe z, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Démonstration : ....

Exemple : Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{(k-1)!}$.

....

....

....

....

....

....

3 Condition nécessaire de convergence

Théorème 2 : *Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration : ....

Conséquence : Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, alors la série diverge. On parle de **divergence grossière**.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n+3}$ ....

....

La réciproque est fausse en général . Exemple : $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$.

4 Opérations usuelles

Théorème 3 : *Soit λ un scalaire. Si les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes de sommes respectives U et V, alors :*

- *la série de terme général $u_n + v_n$ converge vers U+V*
- *la série de terme général λu_n converge vers λU*

....

....

....

....

Démonstration : ....

Il se peut très bien que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, que $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge et que $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ converge.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{-1}{n}$.

Exemple : ....

....

....

5 Séries à termes réels positifs

Proposition 5 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs.*

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_n$ est majorée.

Démonstration : ....

Proposition 6 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels positifs.*

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

- *Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge vers $+\infty$, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.*

Démonstration : ....

Exemple : Etudier la nature de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{2+\sin(n)}{3^n}$.

....

Proposition 7 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels positifs.*

Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration : ....

On n'a pas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Exemple : Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+2}$.

. . . .

Proposition 8 : *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0 - 1; +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue et décroissante sur $[n_0 - 1; +\infty[$. Alors pour tout entier $N \geq n_0$:*

$$\int_{n_0}^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{N} f(k) \leq \int_{n_0-1}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : . . . .

On fera attention à ne pas appliquer ce théorème à des séries complexes ou des séries dont le terme général ne garde pas un signe constant.

Remarque : Si f est croissante, on a le résultat suivant :

$$\int_{n_0-1}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{N} f(k) \leq \int_{n_0}^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Définition 3 : On appelle **série de Riemann** toute série de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel.

Théorème 4 : *La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

Démonstration : . . . .

6 Série absolument convergente

Définition 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Notation : On note alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$

Théorème 5 : *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres. Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Démonstration : ....

La réciproque est fausse. Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

....

....

....

....

Exemple : Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin(n)}{n^2}$ converge.

....

....

....

....

Proposition 9 : *Soit* v *une suite à termes réels positifs et* u *une suite (réelle ou complexe) telles que* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. *Si la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge absolument.*

Démonstration : ....

Remarque : La contraposée donne un critère de divergence.

Exemple : Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} exp(-\sqrt{n})$.

....

....

....