Epreuve de mathématiques 7
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Représentation matricielle

Partie 1 : Mise en place des matrices

On note j le complexe $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x} \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{jx} \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{j^2x} \end{array}.$$

On pose alors $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ et $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathscr{C})$. On note également

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & jx \end{array}.$$

Enfin pour tout $f \in E$, on pose $T(f) = f \circ \tau$.

1. (a) Soient $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$. Montrer que

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + jx_2 + j^2 x_3 = 0 \\ x_1 + j^2 x_2 + j x_3 = 0 \end{cases}$$

On pourra penser à dériver.

   (b) Résoudre $(\mathcal{S})$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de E en déduire la dimension de E.
3. Montrer que $T(\mathscr{C}) = (f_2, f_3, f_1)$.
4. Montrer que T est un endomorphisme de E.
5. Montrer que $T \in \mathrm{GL}(E)$.
6. Calculer $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(T)$.

On pose $u = -T - T^2$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
8. Préciser $u(f_1)$.
9. Préciser v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B.

On note w l'endomorphisme de E tel que $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(w)$.

10. Soit $f \in E$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Déterminer $w(f)$.

Partie 2 : Trigonalisation de B

On pose $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer suivant la valeur de λ, $\operatorname{Ker}(B - \lambda I_3)$.
12. Montrer que (a, b) est une base de $\operatorname{Ker}(B - 2I_3)$. En déduire $\operatorname{Ker}(w - 2\operatorname{Id}_E)$.
13. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(B - 2I_3)$. En déduire $\operatorname{Im}(w - 2I_E)$.
14. Soient $x \in \mathbb{C}^*$ et $c = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $\mathscr{B}_v = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
15. Montrer qu'il existe une valeur de $x \in \mathbb{C}^*$ que l'on déterminera telle que
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_v}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie 3 : Diagonalisation de A

On pose $e_1 = f_1 - f_3$, $e_2 = f_2 - f_3$, $e_3 = f_1 + f_2 + f_3$, $\mathscr{B}_u = (e_1, e_2, e_3)$ et enfin $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_u)$.

16. Calculer P.
17. Calculer $\operatorname{rg}(P)$.
18. Justifier que $\mathscr{B}_u$ est une base de E.
19. Calculer $u(\mathscr{B}_u)$.
20. En déduire D la matrice de u dans $\mathscr{B}_u$.
21. Préciser sans calcul la relation entre A et D.
22. Simplifier $\frac{2e_1 - e_2 + e_3}{3}$.
23. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(f_1) = \lambda f_1 + \mu_n (f_1 + f_2 + f_3)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante et $\mu_n \in \mathbb{R}$ un réel ne dépendant que de n que l'on précisera.

Partie 4 : Vecteurs propres de A et B

On considère les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_A = \left\{ X \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{C},\ AX = \lambda X \right\}$$
$$\mathscr{E}_B = \left\{ X \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \exists \mu \in \mathbb{C},\ BX = \mu X \right\}$$

24. Montrer que $\mathscr{E}_B = \operatorname{Ker}(B - 2I_3)$.
25. Soient $X \in \mathbb{C}^3$ et $Y = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_u}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_3) \iff Y \in \operatorname{Ker}(D - \lambda I_3).$$
26. En déduire que $\mathscr{E}_A = \operatorname{Ker}(A - I_3) \cup \operatorname{Ker}(A + 2I_3)$.

Problème 2 - Variables aléatoires

On lance à plusieurs reprise une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$ et face avec une probabilité $q = 1 - p \in]0;1[$. On supposes les différents lancers identiques et indépendants. On s'intéresse aux nombres de séries de résultats identiques. Plus précisément pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombres de lots de résultats identiques consécutifs observés entre 1 et n (y compris les lots de longueur 1). Par exemple, en notant F le fait d'obtenir face et P le fait d'obtenir pile, dans la série $FFPFPPFFPPP$. Alors pour un tel ω, on a $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$ puis $N_3(\omega) = 2$, $N_4(\omega) = 3$, $N_5(\omega) = N_6(\omega) = 4$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 5$ et enfin $N_9(\omega) = N_{10}(\omega) = N_{11}(\omega) = 6$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire retournant 1 si la pièce a donné pile au lancer n et 0 sinon.

Partie 1 : Lois initiales

1. Déterminer la loi de $N_2 - 1$. En déduire l'espérance et la variance de N_2.
2. (a) Exprimer $(N_2 = 1, N_3 = 2)$ uniquement avec X_1, X_2, X_3 et les symboles $=$ et $\neq$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2)$.
3. Déterminer la loi conjointe de (N_2, N_3).
4. Déterminer la loi conditionnelle de N_3 sachant $N_2 = 1$.
5. Déterminer la loi marginale de N_3.
6. Les variables N_2 et N_3 sont-elles indépendantes ?
7. Préciser l'espérance et la variance de N_3.

Partie 2 : A l'ordre n

On suppose dans toute la suite que $p = q = \frac{1}{2}$ i.e. que la pièce est équilibrée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

8. Calculer $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.
9. Montrer que pour tout $k \in [\![2;n]\!]$,
$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1, X_n = 0).$$
10. En déduire que
$$\forall k \in [\![1;n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose,
$$G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} t^k \mathbb{P}(N_n = k) \quad \text{et} \quad G_{N_{n+1}}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_{n+1} = k)$$

11. Montrer que $G'_{N_n}(1) = \mathbb{E}(N_n)$. On admettra dans la suite que
$$\mathbb{V}(N_n) = G''_{N_n}(1) + G'_{N_n}(1) - G'_{N_n}(1)^2.$$
12. Déterminer une relation de récurrence entre $G_{N_{n+1}}$ et G_{N_n}.
13. En déduire G_{N_n}.
14. Calculer $\mathbb{E}(N_n)$, $\mathbb{V}(N_n)$. Vérifier la cohérence avec la question 7.
15. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}}$.
16. En déduire la loi de N_n.
17. Redémontrer alors la question 10.