Corrigé du Devoir Surveillé 7 Représentation matricielle et variables aléatoires

Problème I - Représentation matricielle

Partie 1 : Mise en place des matrices

On note j le complexe $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x} \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{jx} \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{j^2 x} \end{array}.$$

On pose alors $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ et $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathscr{C})$. On note également

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & jx \end{array}.$$

Enfin pour tout $f \in E$, on pose $T(f) = f \circ \tau$.

1. (a) Soient $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) = x_1 \mathrm{e}^{x} + x_2 \mathrm{e}^{jx} + x_3 \mathrm{e}^{j^2 x}.$$

En particulier, pour $x = 0$, on a

$$0 = g(0) = x_1 + x_2 + x_3.$$

De plus la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = x_1 \mathrm{e}^{x} + j x_2 \mathrm{e}^{jx} + j^2 x_3 \mathrm{e}^{j^2 x}$$
$$g''(x) = x_1 \mathrm{e}^{x} + j^2 x_2 \mathrm{e}^{jx} + j^4 x_3 \mathrm{e}^{j^2 x}$$

Or $j^3 = 1$ et $j^4 = j$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = x_1 \mathrm{e}^{x} + j^2 x_2 \mathrm{e}^{jx} + j x_3 \mathrm{e}^{j^2 x}$. Or $g = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$ implique que $g' = g'' = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$. Donc en particulier,

$$0 = g'(0) = x_1 + j x_2 + j^2 x_3$$
$$0 = g''(0) = x_1 + j^2 x_2 + j x_3.$$

Conclusion, on obtient :

$$\boxed{(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + j x_2 + j^2 x_3 = 0 \\ x_1 + j^2 x_2 + j x_3 = 0 \end{cases}.}$$

(b) On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ (j-1)\,x_2+\left(j^2-1\right)x_3=0 \\ \left(j^2-1\right)x_2+(j-1)\,x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+(j+1)\,x_3=0 \\ (j+1)\,x_2+x_3=0 \end{cases} \qquad \text{car } j-1\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+(j+1)\,x_3=0 \\ \left(1-(j+1)^2\right)x_3=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3-(j+1)\,L_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+(j+1)\,x_3=0 \\ \left(-j^2-2j\right)x_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+(j+1)\,x_3=0 \\ -j\,(j+2)\,x_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \qquad \text{car } j\neq 0 \text{ et } j+2\neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{(\mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \quad x_1=x_2=x_3=0.}$$

2. Montrons que $\mathscr{C}=(f_1,f_2,f_3)$ est libre. Soit $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$ tel que $x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3=0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$. Alors par les questions précédentes, (x_1,x_2,x_2) est solution de $(\mathcal{S})$ et donc $x_1=x_2=x_3$. Donc $\mathscr{C}$ est libre. Or par définition de E, $\mathscr{C}$ est une famille génératrice de E. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E)=\mathrm{Card}(\mathscr{C})=3.}$$

3. Calculons pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(f_1)(x) &= f_1\circ\tau(x)=f_1(jx)=\mathrm{e}^{jx}=f_2(x) \\ T(f_2)(x) &= f_2\circ\tau(x)=f_2(jx)=\mathrm{e}^{j(jx)}=\mathrm{e}^{j^2x}=f_3(x) \\ T(f_3)(x) &= f_3\circ\tau(x)=f_3(jx)=\mathrm{e}^{j^2(jx)}=\mathrm{e}^{j^3x}=\mathrm{e}^{x}=f_1(x). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a bien $T(f_1)=f_2$, $T(f_2)=f_3$ et $T(f_3)=f_1$. Conclusion,

$$\boxed{T(\mathscr{C})=(f_2,f_3,f_1)\,.}$$

4. Montrons que T est linéaire. Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ et tout $(f,g)\in E^2$, on pose $h=\lambda f+\mu g$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$T(h)(x)=h\circ\tau(x)=h(jx)=\lambda f(jx)+\mu g(jx)=\lambda f\circ\tau(x)+\mu g\circ\tau(x)=\lambda T(f)(x)+\mu T(g)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a donc $T(\lambda f+\mu g)=T(h)=\lambda T(f)+\mu T(g)$. Donc T est linéaire. Montrons maintenant que T est à valeurs dans E. Soit $f\in E=\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathscr{C})$. Alors, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{C}^3$ tel que $f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3$. Donc par linéarité de T, on a

$$T(f)=T(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3)=\lambda_1 T(f_1)+\lambda_2 T(f_2)+\lambda_3 T(f_3)\,.$$

Donc par la question précédente,

$$T(f) = \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_3 + \lambda_3 f_1 \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathscr{C}) = E$$

Donc $T : E \to E$. Conclusion,

$$\boxed{T \in \mathscr{L}(E) \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

5. T est une endomorphisme de E de plus, par la question 3. l'image de $\mathscr{C}$ par T est donnée par $T(\mathscr{C}) = (f_2, f_3, f_1)$. Or par permutation circulaire des vecteurs, on a

$$\mathrm{rg}(f_2, f_3, f_1) = \mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{rg}(\mathscr{C}) = 3 \qquad \text{car } \mathscr{C} \text{ est libre.}$$

Donc $\mathrm{rg}(T(\mathscr{C})) = 3 = \dim(E) = \mathrm{Card}(T(\mathscr{C}))$. Donc $T(\mathscr{C})$ est libre et génératrice de E. Donc $T(\mathscr{C})$ est une base de E. Donc T envoie une base sur une base et donc T est un isomorphisme. Conclusion,

$$\boxed{T \in \mathrm{GL}(E) \text{ est un automorphisme de } E.}$$

6. On sait que $T(f_1) = f_2$, $T(f_2) = f_3$, $T(f_3) = f_1$. On a donc directement

$$\boxed{M = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On pose $u = -T - T^2$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. On a directement

$$\begin{aligned} A = -M - M^2 &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

8. Puisque $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)$. On a directement $u(f_1) = -f_2 - f_3$ i.e.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u(f_1)(x) = -f_2(x) - f_3(x) = -\mathrm{e}^{jx} - \mathrm{e}^{j^2 x}.}$$

9. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$v(x, y, z) = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 3y - z \\ 2y \\ x - 3y + z \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad v(x, y, z) = (3x - 3y - z, 2y, x - 3y + z).}$$

On note w l'endomorphisme de E tel que $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(w) = B$.

10. Soit $f \in E$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Déterminer $w(f)$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(w(f))$.

    Alors, on a
$$Y = BX = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 3x_2 - x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$
    Donc
$$\boxed{w(f) = (3x_1 - 3x_2 - x_3) f_1 + 2x_2 f_2 + (x_1 - 3x_2 + x_3) f_3.}$$

Partie 2 : Trigonalisation de B

On pose $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(B - \lambda I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad (B - \lambda I_3) X = 0_{\mathbb{C}^3} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^3} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} (3-\lambda)x - 3y - z \\ (2-\lambda)y \\ x - 3y + (1-\lambda)z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (3-\lambda)x - 3y - z = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ x - 3y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$
    Premier cas, si $\lambda = 2$. Alors,
$$X \in \mathrm{Ker}(B - 2I_3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3y + z.$$
    Donc
$$\mathrm{Ker}(f - 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$
    Les deux vecteurs obtenus n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de $\mathrm{Ker}(f - 2I_3)$.

    Deuxième cas, supposons que $\lambda \neq 2$. Dès lors,
$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(B - \lambda I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (3-\lambda)x - z = 0 \\ y = 0 \\ x + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = (3-\lambda)x \\ y = 0 \\ x + (1-\lambda)(3-\lambda)x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(B-\lambda I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=(3-\lambda)\,x \\ y=0 \\ \left(1+3-4\,\lambda+\lambda^2\right)x=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=(3-\lambda)\,x \\ y=0 \\ \left(4-4\,\lambda+\lambda^2\right)x=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=(3-\lambda)\,x \\ y=0 \\ (\lambda-2)^2\,x=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=(3-\lambda)\,x \\ y=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \text{car } \lambda\neq 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x=y=z=0.
\end{aligned}
$$

Dans ce cas, $\operatorname{Ker}(B-\lambda I_3)=\{0_{\mathbb{C}^3}\}$.

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(B-\lambda I_3)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall\,\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{2\}\,,\ \operatorname{Ker}(B-\lambda I_3)=\{0_{\mathbb{C}^3}\}\,.}$$

12. Par la question précédente, on a $\operatorname{Ker}(B-2I_3)=\operatorname{Vect}(a,b)$ donc (a,b) est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(B-2I_3)$. De plus les vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre. Conclusion,

$$\boxed{(a,b)=\left(\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(B-2I_3).}$$

Attention, si vous avez obtenu une autre famille précédemment, il faut effectuer des opérations élémentaires pour reconstruire (a,b).

Puisque $B-2I_3=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(w-2\operatorname{Id}_E)$, alors, on obtient que

$$\boxed{\operatorname{Ker}(w-2\operatorname{Id}_E)=\operatorname{Vect}(3f_1+f_2,f_1+f_3)\,.}$$

13. Par la question précédente, on a $\dim(\operatorname{Ker}(B-2I_3))=\operatorname{Card}(a,b)=2$. Donc par le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(B-2I_3)=3-\dim(\operatorname{Ker}(B-2I_3))=3-2=1.$$

Donc une seule colonne non nulle de $B-2I_3$ suffit à engendrer toute l'image (qui est donc une droite vectorielle). Or $B-2I_3=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&0&0\\1&-3&-1\end{pmatrix}$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(B-2I_3)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\operatorname{Vect}(b)\,.}$$

Et ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Im}(w-2I_E)=\operatorname{Vect}(f_1+f_3)\,.}$$

14. Soient $x \in \mathbb{C}^*$ et $c = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathscr{B}_v = (a, b, c)$. On a

$$\operatorname{rg}(\mathscr{B}_v) = \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_1 \leftrightarrow C_3$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{x} & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad C_2 \leftrightarrow C_3.$$

Puisque $x \neq 0$, on a bien 3 pivots, donc $\operatorname{rg}(\mathscr{B}_v) = 3 = \dim(E) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_v)$. Donc $\mathscr{B}_v$ est libre et génératrice. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_v = (a, b, c) \text{ est une base de } \mathbb{C}^3.}$$

15. Puisque v est associé à B dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on a

$$\operatorname{Ker}(v - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}) = \operatorname{Ker}(B - 2I_3) = \operatorname{Vect}(a, b).$$

Donc $a \in \operatorname{Ker}(v - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3})$ i.e.

$$(v - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3})(a) = 0_{\mathbb{C}^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad v(a) - 2a = 0_{\mathbb{C}^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad v(a) = 2a.$$

De même, $v(b) = 2b$. Enfin, on cherche x et donc c tel que $v(c) = 2c + b$ i.e.

$$\begin{aligned} B\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 3x = 2x + 1 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad x = 1. \end{aligned}$$

Posons $x = 1$ et donc $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors, par les équivalences précédentes, on a $v(c) = 2c + b$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Si } x = 1, \text{ alors } \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_v}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 : Diagonalisation de A

On pose $e_1 = f_1 - f_3$, $e_2 = f_2 - f_3$, $e_3 = f_1 + f_2 + f_3$, $\mathscr{B}_u = (e_1, e_2, e_3)$ et enfin $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_u)$.

16. Par définition de P et de $\mathscr{B}_u$, on a directement,

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

17. Par opération élémentaire, on a

$$\operatorname{rg}(P) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(P) = 3.}$$

18. Puisque $\operatorname{rg}(P) = 3$, on en déduit que $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_u)$ est une matrice inversible. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_u \text{ est une base de } E.}$$

19. On a $X = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$Y = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(u(e_1)) = AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = X.$$

Donc $u(e_1) = e_1$. De même,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(u(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(e_2).$$

Donc $u(e_2) = e_2$. Enfin,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(u(e_3)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(e_3).$$

Donc $u(e_3) = -2e_3$. Conclusion,

$$\boxed{u(\mathscr{B}_u) = (e_1, e_2, -2e_3).}$$

20. Directement, par la question précédente, on a

$$\boxed{D = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_u}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.}$$

21. Par la formule de changement de base, on a

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ ou encore } D = P^{-1}AP.}$$

22. On a les égalités dans E suivantes :

$$\frac{2e_1 - e_2 + e_3}{3} = \frac{2f_1 - 2f_3 - f_2 + f_3 + f_1 + f_2 + f_3}{3} = f_1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{2e_1 - e_2 + e_3}{3} = f_1.}$$

23. Par la question précédente, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(f_1) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(u^n(f_1)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(u^n)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(f_1) = D^n \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(f_1).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris $n = 0$), on a par récurrence,

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(u^n(f_1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ (-2)^n \end{bmatrix}.$$

Or en posant $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(u^n(f_1))$ et $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u^n(f_1))$, on sait que

$$X = PX' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ (-2)^n \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+(-2)^n \\ -1+(-2)^n \\ -1+(-2)^n \end{bmatrix}.$$

Finalement en repassant dans E, on obtient alors,

$$\begin{aligned} u^n(f_1) &= \frac{(2+(-2)^n) f_1 + (-1+(-2)^n) f_2 + (-1+(-2)^n) f_3}{3} \\ &= \frac{(3-1+(-2)^n) f_1 + (-1+(-2)^n) f_2 + (-1+(-2)^n) f_3}{3} \\ &= f_1 + \frac{(-2)^n - 1}{3}(f_1 + f_2 + f_3). \end{aligned}$$

Donc en posant $\lambda = 1$ et $\mu_n = \frac{(-2)^n-1}{3}$, on obtient bien le résultat souhaité. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u^n(f_1) = f_1 + \frac{(-2)^n - 1}{3}(f_1 + f_2 + f_3).}$$

Partie 4 : Vecteurs propres de A et de B

On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_A &= \left\{ X \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \exists\,\lambda \in \mathbb{C},\ AX = \lambda\, X \right\} \\ \mathscr{E}_B &= \left\{ X \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \exists \mu \in \mathbb{C},\ BX = \mu X \right\} \end{aligned}$$

24. Soit $X \in \mathbb{C}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{E}_B \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{C},\ BX = \mu X \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{C},\ (B - \mu I_3)X = 0_{\mathbb{C}^3} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{C},\ X \in \mathrm{Ker}\,(B - \mu I_3). \end{aligned}$$

Premier cas, $\mu \neq 2$ et donc par la question 11. $X \in \mathrm{Ker}\,(B - \mu I_3) = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$. Deuxième cas, $\mu = 2$ et donc $X \in \mathrm{Ker}\,(B - 2I_3)$. Donc

$$X \in \mathscr{E}_B \quad \Leftrightarrow \quad X = 0_{\mathbb{C}^3} \ \text{ OU } \ X \in \mathrm{Ker}\,(B - 2I_3).$$

Or $0_{\mathbb{C}^3} \in \mathrm{Ker}\,(B - 2I_3)$. Finalement,

$$X \in \mathscr{E}_B \qquad \Leftrightarrow \qquad X \in \mathrm{Ker}\,(B - 2I_3)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E}_B = \mathrm{Ker}\,(B - 2I_3)\,.}$$

25. Soient $X \in \mathbb{C}^3$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Rappelons que $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(u)$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)$, $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_u)$ et $A = PDP^{-1}$. Donc on a $X = PY$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad AX = \lambda X \\
&\Leftrightarrow \quad PDP^{-1}PY = \lambda PY \\
&\Leftrightarrow \quad PDY = P(\lambda Y) \\
&\Leftrightarrow \quad DY = \lambda Y \qquad \textbf{car } P \textbf{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad Y \in \mathrm{Ker}\,(D - \lambda I_3)\,.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{X \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_3) \;\Leftrightarrow\; Y \in \mathrm{Ker}\,(D - \lambda I_3)\,.}$$

26. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1; -2\}$. Alors, $1 - \lambda \neq 0$, $-2 - \lambda \neq 0$ et donc $\mathrm{rg}\,(D - \lambda I_3) = 3$ i.e. $D - \lambda I_3$ est inversible et donc $\mathrm{Ker}\,(D - \lambda I_3) = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$. Or, pour $X \in \mathbb{C}^3$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
X \in \mathscr{E}_A \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^3,\ X \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_3) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^3,\ Y \in \mathrm{Ker}\,(D - \lambda I_3) \qquad \text{par la question précédente} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^3,\ Y \in \mathrm{Ker}\,(D - \lambda I_3) = \{0_{\mathbb{C}^3}\} \\
&\qquad\qquad \text{OU}\ \ Y \in \mathrm{Ker}\,(D - I_3) \ \ \text{OU}\ \ Y \in \mathrm{Ker}\,(D + 2I_3) \\
&\Leftrightarrow \quad Y \in \{0_{\mathbb{C}^3}\} \ \ \text{OU}\ \ Y \in \mathrm{Ker}\,(D - I_3) \cup \mathrm{Ker}\,(D + 2I_3)\,.
\end{aligned}$$

Or $\{0_{\mathbb{C}^3}\} \subset \mathrm{Ker}\,(D - I_3) \cup \mathrm{Ker}\,(D + 2I_3)$. Donc,

$$X \in \mathscr{E}_A \qquad \Leftrightarrow \qquad Y \in \mathrm{Ker}\,(D - I_3) \cup \mathrm{Ker}\,(D + 2I_3)\,.$$

En raisonnant comme à la question précédente, on a $Y \in \mathrm{Ker}\,(D - I_3) \cup \mathrm{Ker}\,(D + 2I_3) \;\Leftrightarrow\; X \in \mathrm{Ker}\,(A - I_3) \cup \mathrm{Ker}\,(A + 2I_3)$. D'où,

$$X \in \mathscr{E}_A \qquad \Leftrightarrow \qquad X \in \mathrm{Ker}\,(A - I_3) \cup \mathrm{Ker}\,(A + 2I_3)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E}_A = \mathrm{Ker}\,(A - I_3) \cup \mathrm{Ker}\,(A + 2I_3)\,.}$$

Problème II - Variables aléatoires

On lance à plusieurs reprise une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$ et face avec une probabilité $q = 1 - p \in]0;1[$. On supposes les différents lancers identiques et indépendants. On s'intéresse aux nombres de séries de résultats identiques. Plus précisément pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombres de lots de résultats identiques consécutifs observés entre 1 et n. Par exemple, en notant F le fait d'obtenir face et P le fait d'obtenir pile, dans la série $FFPPPPFFFPPP$. Alors pour un tel ω, on a $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$ puis $N_3(\omega) = N_4(\omega) = N_5(\omega) = N_6(\omega) = 2$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$ et enfin $N_9(\omega) = N_{10}(\omega) = N_{11}(\omega) = 4$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire retournant 1 si la pièce a donné pile et 0 sinon.

Partie 1 : Lois initiales

1. En deux lancers, il est possibles d'effectuer PP, PF, FP ou FF. On obtient pour N_2 dans chaque cas 1, 2, 2 et 1 respectivement. Donc l'univers image de $N_2(\Omega)$ est donné par $N_2(\Omega) = \{1;2\}$, en effet ou les deux lancers sont identiques et $N_2 = 1$ ou les deux lancers sont distincts et $N_2 = 2$. Dès lors, $(N_2 - 1)(\Omega) = \{0;1\}$. Nécessairement, on en déduit que $N_2 - 1$ est une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre :
$$\mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) = \mathbb{P}(N_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 \neq X_2).$$
Or $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \mid X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1)\\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1)\\ &\qquad\qquad\qquad\text{car les deux lancers sont indépendants}\\ &= p \times (1-p) + (1-p) \times p \qquad \text{car } X_1 \sim \mathscr{B}(p) \text{ et } X_2 \sim \mathscr{B}(p)\\ &= 2p(1-p).\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{N_2 - 1 \sim \mathscr{B}(2p(1-p)).}$$
On a donc directement d'après le cours,
$$\mathbb{E}(N_2 - 1) = 2p(1-p)$$
et
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_2 - 1) &= 2p(1-p)(1 - 2p(1-p))\\ &= 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right).\end{aligned}$$
Par linéarité de l'espérance,
$$\mathbb{E}(N_2) = \mathbb{E}(N_2 - 1) + 1 = 2p(1-p) + 1 = 1 + 2p - 2p^2.$$
Par propriété de la variance,
$$\mathbb{V}(N_2) = \mathbb{V}(N_2 - 1) = 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{E}(N_2) = 1 + 2p - 2p^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(N_2) = 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right).}$$

2. (a) On observe que $(N_2 = 1)$ est l'évènement les deux premiers lancers sont identiques : $(X_1 = X_2)$. Dans ce cas, pour obtenir $(N_3 = 2)$, il faut ajouter un troisième lancer différent des deux premiers et donc
$$\boxed{(N_2 = 1, N_3 = 2) = (X_1 = X_2 \neq X_3).}$$

(b) Par la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3).$$

Or $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3, X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 0) \\
&\qquad\qquad \text{car } X_1,\ X_2,\ X_3 \text{ sont indépendantes} \\
&= (1-p)(1-p)p + pp(1-p) \\
&= p(1-p)(1-p+p).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = p(1-p).}$$

3. On note qu'en trois lancers, il est possible de faire
   - trois lancers alternés : PFP ou FPF et donc $N_3 = 3$,
   - deux lancers identiques et un troisième distincts : PPF, FFP, PFF, FPP et donc $N_3 = 2$
   - ou enfin trois lancers identiques : PPP ou FFF et donc $N_3 = 1$.

   D'où

   $$N_3(\Omega) = [\![1;3]\!].$$

   Dès lors, l'univers image du couple (N_2, N_3) est inclus dans $[\![1;2]\!] \times [\![1;3]\!]$. On procède de la même façon que dans la question précédente, on observe que $(N_2 = 1, N_3 = 1) = (X_1 = X_2 = X_3)$. Donc, toujours par la formule des probabilités totales,

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3) \\
   &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3, X_1 = 1) \\
   &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \\
   &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1) \\
   &\qquad\qquad \text{par indépendance.} \\
   &= (1-p)^3 + p^3 \\
   &= 1 - 3p + 3p^2 - p^3 + p^3 \\
   &= 1 - 3p + 3p^2.
   \end{aligned}$$

   On observe qu'il est impossible d'avoir moins de séries à l'étape 3 qu'à l'étape 2. Donc

   $$\mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 1) = 0.$$

   Par la question précédente, $\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = p(1-p)$.

   L'évènement $(N_2 = 2, N_3 = 2) = (X_1 \neq X_2 = X_3)$. Donc

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 = X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 = X_3, X_1 = 1) \\
   &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) \\
   &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_3 = 0) \\
   &\qquad\qquad \text{par indépendance} \\
   &= (1-p)p^2 + p(1-p)^2 \\
   &= (1-p)p(p+1-p) \\
   &= (1-p)p.
   \end{aligned}$$

Egalement,

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 3) = 0.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 3) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq X_3) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \\ &= (1-p)\,p\,(1-p) + p\,(1-p)\,p \\ &= (1-p)\,p\,(1-p+p) \\ &= p\,(1-p).\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient le tableau suivant :

$N_2 = i \backslash N_3 = j$	1	2	3
1	$1-3p+3p^2$	$p\,(1-p)$	0
2	0	$p\,(1-p)$	$p\,(1-p)$

NB : on vérifie que $1-3p+3p^2+3p\,(1-p) = 1-3p+3p^2+3p-3p^2 = 1$ *OK !*

4. Par la question 1.

$\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}(N_2 - 1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) = 1 - 2p\,(1-p) = 1 - 2p + 2p^2 = (1-p)^2 + p^2 > 0.$

Donc $\mathbb{P}(N_2 = 1) \neq 0$ et par définition, pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(N_3 = i \mid N_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 1)}{\mathbb{P}(N_2 = 1)} = \frac{\mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 1)}{1-2p+2p^2}.$$

Par la deuxième ligne du tableau de la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_3 = 1 \mid N_2 = 1) &= \frac{1-3p+3p^2}{1-2p+2p^2}, \\ \mathbb{P}(N_3 = 2 \mid N_2 = 1) &= \frac{p\,(1-p)}{1-2p+2p^2}, \\ \mathbb{P}(N_3 = 2 \mid N_2 = 1) &= 0.\end{aligned}$$

Conclusion, la loi conditionnelle de N_3 sachant $(N_2 = 1)$ est donnée par

j	1	2	3
$\mathbb{P}(N_3 = j \mid N_2 = 1)$	$\frac{1-3p+3p^2}{1-2p+2p^2}$	$\frac{p(1-p)}{1-2p+2p^2}$	0

5. Soit $i \in [\![1;3]\!]$. On sait que $((N_2 = 1), (N_2 = 2))$ forme un système complet d'évènements (incompatibles) donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(N_3 = i) = \mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 1) + \mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = j).$$

Donc d'après la loi conjointe donnée par le tableau de la question 3. on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_3 = 1) &= 1-3p+3p^2+0 = 1-3p+3p^2 \\ \mathbb{P}(N_3 = 2) &= p\,(1-p) + p\,(1-p) = 2p\,(1-p) \\ \mathbb{P}(N_3 = 3) &= 0 + p\,(1-p) = p\,(1-p).\end{aligned}$$

Conclusion, la loi marginale de N_3 est donnée par

i	1	2	3
$\mathbb{P}(N_3 = i)$	$1-3p+3p^2$	$2p(1-p)$	$p(1-p)$

6. Par les questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 3) = 0$$

mais

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 = 1)\,\mathbb{P}(N_3 = 3) &= (1-2p(1-p))\,p(1-p)\\ &= \left(1-2p+2p^2\right)p(1-p)\\ &= \left((1-p)^2+p^2\right)p(1-p) > 0 \qquad \text{car } p \in \,]0;1[.\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 3) \neq \mathbb{P}(N_2 = 1)\,\mathbb{P}(N_3 = 3)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les variables } N_2 \text{ et } N_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

7. Par définition,

$$\mathbb{E}(N_3) = \sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}(N_3 = k)\,.$$

Donc par la question 5.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_3) &= 1\times\left(1-3p+3p^2\right) + 2\times 2p(1-p) + 3\times p(1-p)\\ &= 1-3p+3p^2+7p(1-p)\\ &= 1+4p-4p^2.\end{aligned}$$

D'autre part, par le théorème de transfert puis la question 5.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(N_3^2\right) = \sum_{k=1}^{3} k^2\mathbb{P}(N_3 = k) &= 1^2\times\left(1-3p+3p^2\right) + 2^2\times 2p(1-p) + 3^2\times p(1-p)\\ &= 1-3p+3p^2+17p(1-p)\\ &= 1+14p-14p^2.\end{aligned}$$

Donc par la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_3) = \mathbb{E}\left(N_3^2\right) - \mathbb{E}(N_3)^2 &= 1+14p-14p^2-\left(1+4p-4p^2\right)^2\\ &= 1+14p-14p^2-1-16p^2-16p^4-8p+8p^2+32p^3\\ &= 6p-22p^2+32p^3-16p^4\\ &= 2p\left(3-11p+16p^2-8p^3\right)\\ &= 2p(1-p)\left(3-8p+8p^2\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(N_3) = 1+4p-4p^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(N_3) = 2p(1-p)\left(3-8p+8p^2\right).}$$

Partie 2 : A l'ordre n

On suppose dans toute la suite que $p = q = \frac{1}{2}$ i.e. que la pièce est équilibrée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

8. On note que $(N_n = 1)$ équivaut à avoir obtenu toujours le même résultat au cours des n lancers :

$$\mathbb{P}(N_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n).$$

Or $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ forme un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_n = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n, X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0)\dots\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)\dots\mathbb{P}(X_n = 1) \\
&\qquad \text{par indépendance} \\
&= (1-p)^n + p^n \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{car } p = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Au contraire, $(N_n = n)$ équivaut à avoir eu des lancers alternés à chaque fois :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_n = n) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq X_2 \neq \ldots \neq X_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq \ldots \neq X_n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq \ldots \neq X_n, X_1 = 1).
\end{aligned}$$

Supposons n pair,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_n = n) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, \ldots, X_n = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, \ldots, X_n = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1)\dots\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0)\dots\mathbb{P}(X_n = 0) \\
&\qquad \text{par indépendance} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

De la même façon, si n est impair, $\mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(N_n = 1) = \mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

9. Soit $k \in [\![2; n]\!]$. Puisque $((X_n = 0), (X_n = 1))$ forme un système complet, on a par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

On note que si $(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0)$ est réalisé alors, les lancers n et $n+1$ sont distincts et donc $N_{n+1} = N_n + 1$ i.e. $N_n = N_{n+1} - 1$. Dès lors,

$$(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0) = (N_n = k-1, X_{n+1} = 1, X_n = 0).$$

Au contraire, si $(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1)$ est réalisé, alors les lancers n et $n+1$ sont identiques, donc $N_{n+1} = N_n$ et ainsi

$$(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1) = (N_n = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

Par suite,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(N_n = k-1, X_{n+1} = 1, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_n = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

De plus, on note que N_n dépend entièrement de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et X_{n+1} est indépendante de ces variables aléatoires. Par conséquent, X_{n+1} et N_n sont indépendantes. Mieux, X_{n+1} est indépendante du couple (N_n, X_n). Donc

$$\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k, X_{n+1}=1\right)=\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1\right) \mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=0\right)+\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1\right) \mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=1\right).$$

Or $X_{n+1} \sim \mathscr{B}(p)=\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. D'où,

$$\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k, X_{n+1}=1\right)=\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=0\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=1\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1 ; n+1 \rrbracket, \qquad \mathbb{P}\left(N_{n+1}=k, X_{n+1}=1\right)=\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=1\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=0\right).}$$

10. Soit $k \in \llbracket 2 ; n \rrbracket$, de même que dans la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k, X_{n+1}=0\right) & =\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k, X_{n+1}=0, X_n=0\right)+\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k, X_{n+1}=0, X_n=1\right) \\
& =\mathbb{P}\left(N_n=k, X_{n+1}=0, X_n=0\right)+\mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_{n+1}=0, X_n=1\right) \\
& =\mathbb{P}\left(X_{n+1}=0\right) \mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=0\right)+\mathbb{P}\left(X_{n+1}=0\right) \mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=1\right) \\
& =\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=0\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=1\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\left(\left(X_{n+1}=0\right),\left(X_{n+1}=1\right)\right)$ forme un système complet d'évènements, par le formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k\right)=\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k, X_{n+1}=0\right)+\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k, X_{n+1}=1\right).$$

Donc par ce qui précède et la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k\right) & =\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=0\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=1\right) \\
& \quad \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=1\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=0\right) \\
& =\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=0\right)+\mathbb{P}\left(N_n=k, X_n=1\right)\right) \\
& \quad+\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=1\right)+\mathbb{P}\left(N_n=k-1, X_n=0\right)\right) \\
& =\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1\right),
\end{aligned}$$

par la formule des probabilités totales car $\left(\left(X_n=0\right),\left(X_n=1\right)\right)$ forme un système complet d'évènements. Donc

$$\forall k \in \llbracket 2 ; n \rrbracket, \qquad \mathbb{P}\left(N_{n+1}=k\right)=\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1\right).$$

De plus, si $k=1$, alors par la question 9. $\mathbb{P}\left(N_{n+1}=1\right)=\frac{1}{2^n}$, $\mathbb{P}\left(N_n=1\right)=\frac{1}{2^{n-1}}$ et $\mathbb{P}\left(N_n=0\right)=0$. Donc

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1\right)=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}}+0=\frac{1}{2^n}=\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k\right).$$

De même, si $k=n+1$, $\mathbb{P}\left(N_{n+1}=n+1\right)=\frac{1}{2^n}$, $\mathbb{P}\left(N_n=n+1\right)=0$ et $\mathbb{P}\left(N_n=0\right)=n+1-1=\mathbb{P}\left(N_n=n\right)=\frac{1}{2^{n-1}}$. Donc

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1\right)=0+\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}=\mathbb{P}\left(N_{n+1}=k\right).$$

Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1 ; n+1 \rrbracket, \qquad \mathbb{P}\left(N_{n+1}=k\right)=\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k\right)+\frac{1}{2} \mathbb{P}\left(N_n=k-1\right).}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose,

$$G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} t^k \mathbb{P}(N_n = k) \quad \text{et} \quad G_{N_{n+1}}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_{n+1} = k)$$

11. On observe que la fonction G_{N_n} étant polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G'_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} k t^{k-1} \mathbb{P}(N_n = k).$$

En particulier,

$$G'_{N_n}(1) = \sum_{k=1}^{n} k \mathbb{P}(N_n = k).$$

Ce qui est la définition de l'espérance. Conclusion,

$$\boxed{G'_{N_n}(1) = \mathbb{E}(N_n).}$$

On admet dans la suite que

$$\mathbb{V}(N_n) = G''_{N_n}(1) + G'_{N_n}(1) - G'_{N_n}(1)^2.$$

12. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$G_{N_{n+1}}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_{n+1} = k).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
G_{N_{n+1}}(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} t^k \left(\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) \right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k-1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} t^k \mathbb{P}(N_n = k) + 0 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k-1) + 0 \\
&= \frac{1}{2} G_{N_n}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k-1).
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{k} = k - 1$ dans la seconde somme. Alors,

$$\begin{aligned}
G_{N_{n+1}}(t) &= \frac{1}{2} G_{N_n}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} t^{k+1} \mathbb{P}(N_n = k) \\
&= \frac{1}{2} G_{N_n}(t) + \frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n} t^{k} \mathbb{P}(N_n = k) \\
&= \frac{1}{2} G_{N_n}(t) + \frac{t}{2} G_{N_n}(t).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{N_{n+1}}(t) = \frac{1+t}{2} G_{N_n}(t).}$$

13. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, on observe que la suite de réels $(G_{N_n}(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1+t}{2}$. Donc

$$\forall n \geqslant 2, \qquad G_{N_n}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} G_{N_2}(t).$$

Or par la question 1. $\mathbb{P}(N_2 = 2) = 2p(1-p) = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et donc $\mathbb{P}(N_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(N_2 = 1) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$G_{N_2}(t) = t\mathbb{P}(N_2 = 1) + t^2\mathbb{P}(N_2 = 2) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} = \frac{t(1+t)}{2}.$$

Ainsi,

$$G_{N_n}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \frac{t(1+t)}{2} = t\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{N_n}(t) = t\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On sait que $\mathbb{E}(N_n) = G'_{N_n}(1)$. Or par la question précédente, G_{N_n} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G'_{N_n}(t) &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1} + t(n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+t}{2} + \frac{(n-1)t}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}\frac{1+nt}{2}.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(N_n) = G'_{N_n}(1) = \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2}\frac{1+n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

De plus, on a également,

$$\mathbb{V}(N_n) = G''_{N_n}(1) + G'_{N_n}(1) - G'_{N_n}(1)^2.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}G''_{N_n}(t) &= (n-2)\frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}\frac{1+nt}{2} + \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2}\frac{n}{2} \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}\left(\frac{(n-2)(1+nt)}{4} + \frac{1+t}{2}\frac{n}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}\frac{n-2+n(n-2)t+n+nt}{4} \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3}\frac{2n-2+n(n-1)t}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_n) &= \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-3}\frac{2n-2+n(n-1)}{4} + \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2+n-2}{4} + \frac{2n+2}{4} - \frac{n^2+2n+1}{4} \\ &= \frac{n-1}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(N_n) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(N_n) = \frac{n-1}{4}.}$$

En particulier si $n = 3$, on obtient

$$\mathbb{E}(N_3) = \frac{3+1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(N_3) = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or par la question 7. avec $p = 1/2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_3) &= 1 + 4p - 4p^2 = 1 + 2 - 1 = 2 \\ \mathbb{V}(N_3) &= 2p(1-p)\left(3 - 8p + 8p^2\right) = \frac{1}{2}(3 - 4 + 2) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les résultats obtenus sont en accord avec la question 7.}}$$

15. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $t \in \mathbb{R}$. Par la question 13. on a

$$G_{N_n}(t) = t\left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.$$

Par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} G_{N_n}(t) &= \frac{t}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{t^{k+1}}{2^{n-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}} \qquad \text{en posant } \tilde{k} = k+1 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}}.}$$

16. Soit $n \geqslant 2$. Par la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} t^k \mathbb{P}(N_n = k).$$

Posons $P = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{2^{n-1}} \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q = \sum_{k=1}^{n} X^k \mathbb{P}(N_n = k)$. On observe que P et Q coïncident sur $\mathbb{R}$. Donc $P - Q$ admet une infinité de racines et donc $P - Q = 0$ i.e. $P = Q$ ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} X^k \mathbb{P}(N_n = k).$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on conclut que

$$\boxed{N_n(\Omega) = [\![1;n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1;n]\!], \qquad \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

17. Soit $k \in [\![1; n+1]\!]$. Avec la convention $\binom{n-1}{n} = \binom{n-1}{-1} = 0$, on a par la question précédente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) &= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-2}\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2}\right).\end{aligned}$$

Par la formule de Pascal,

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k-1}.$$

Or par la question précédente, on a $\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k-1}$. Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\forall k \in [\![1; n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k-1).}$$

La variable aléatoire N_n compte finalement le nombre de fois où la pièce a changé de face. ***Dans le cas d'une pièce équilibrée,*** *et uniquement dans ce cas là, la probabilité de changer de face ne dépend pas de la face obtenue précédemment. Autrement dit, en notant ξ_k, pour $k \in [\![2; n]\!]$, la variable aléatoire retournant 1 si l'on change de face $(X_k = X_{k-1})$ et 0 sinon, on obtient des variables ξ_k de même loi de Bernoulli, $\xi_k \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et de plus indépendantes ! Ainsi $\xi_2 + \cdots + \xi_n \sim \mathscr{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$. Or on observe que $N_n = 1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Donc $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$ et on retrouve bien dans ce raisonnement que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n = k) &= \mathbb{P}(1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = k) \\ &= \mathbb{P}(\xi_2 + \cdots + \xi_n = k-1) \\ &= \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{2^{n-1-(k-1)}} \\ &= \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$