Interrogation 19 d'entrainement
Espaces préhilbertiens

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir un produit scalaire.
   1.2 Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   1.3 Enoncer le théorème de la base orthonormée incomplète.
   1.4 Définir l'orthogonal d'un espace vectoriel. Propriétés ?
   1.5 Enoncer la formule du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie et celle sur un hyperplan.
   1.6 Définir un espace de Hilbert.

   Révisions

   1.8 Réciter un développement limité de l'exponentielle ou ch ou sh ou cos ou sin ou $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ou $x \mapsto \ln(1+x)$ ou arctan ou $(1+x)^{\alpha}$ à l'ordre n en 0.

2. **Montrer qu'une application est un produit scalaire.**
   2.1 Soit $E = \mathscr{C}^1([0;1])$. Montrer que $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
   2.2 Soit $E = \mathbb{C}$ vu en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $\varphi : (z,z') \mapsto \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$ est un produit scalaire sur E.
   2.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^n P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
   2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $a_i > 0$. Montrer que $\varphi : (X,Y) \mapsto X^T DY$ est un produit scalaire sur E.
   2.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k)$ est un produit scalaire sur E.

3. **Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**
   3.1 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer une base orthonormée de E.
   3.2 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormée de $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z-t = 0 \right\}$.
   3.3 Soit $E = \mathrm{Vect}(\mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ muni du produit scalaire : $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f|g\rangle = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(1)g''(1)$. Déterminer une base orthonormée de E.
   3.4 Déterminer une base orthonormée de $F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a-b+c-d = 0 \right\}$ muni du produit scalaire usuel : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$.
   3.5 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire : $\forall (P,Q) \in E^2$, $\langle P|Q\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P(\cos(\theta))\,Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}t$. Déterminer une base orthonormée de E.

4. **Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.**

   4.1 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, on considère $F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0 \right\}$. Calculer $F^{\perp}$.

   4.2 Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de son produit scalaire $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]$, $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$, on considère

$$F = \left\{ aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} a + b + c + 4d = 0 \\ a + 2b + 4c + 6d = 0 \end{cases} \right\}.$$

   Calculer $F^{\perp}$.

   4.3 Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)^{\perp}$.

   4.4 Soit $E = \mathscr{C}^2([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F = \{ f \in E \mid f(0) = f(1) = 0 \}$ et $G = \{ f \in E \mid f'' = f \}$ sont orthogonaux.

   4.5 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux entre eux. En déduire que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. *Indication pour tout* $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^{\perp}$, *on pourra observe que* $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$.

5. **Distance à un sous-espace vectoriel.**

   5.1 Calculer la distance de $x = (1, 2, 3, 4)$ à $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$ dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique.

   5.2 Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel : $\forall (A, B) \in E^2$, $\mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$. Calculer la distance de $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $F = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & a + b \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

   5.3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire : $\forall (P, Q) \in E^2$, $\langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P'(0)Q'(0) + P'(1)Q'(1)$. Calculer la distance de $U = X^3 + X^2 + X + 1$ à $F = \mathrm{Vect}\left(X^2 - X, X^3 - 1\right)$.

   5.4 Calculer $\displaystyle\inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \sum_{i=0}^{2} \left(i^2 - P(i)\right)^2$.

   5.5 Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t$.