Correction de l'interrogation 19 d'entrainement
Espaces préhilbertiens

1. **Restituer le cours.**

1.1

1.2 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire est une application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

- *(bilinéarité)* Pour tout $(x, y, x', y) \in E^4$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle\lambda\, x + \mu x'|y\rangle = \lambda\,\langle x|y\rangle + \mu\,\langle x'|y\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle x|\lambda\, y + \mu y'\rangle = \lambda\,\langle x|y\rangle + \mu\,\langle x|y'\rangle\,.$$

- *(symétrie)* Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- *(positive)* Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$.
- *(définie)* Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle = 0 \;\Rightarrow\; x = 0_E$.

1.3 Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de E. Alors,

$$\forall\,(x, y) \in E^2, \quad |\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|\,.$$

De plus, on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

1.4 Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut se compléter en une base orthonormée de l'espace E.

1.5 Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors,

$$F^\perp = \{\, x \in E \mid \forall y \in F,\ \langle x|y\rangle = 0_{\mathbb{R}}\,\}\,.$$

De plus,

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F^\perp$ et F sont en somme directe : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- **Si F est de dimension finie**, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires :

$$F \oplus F^\perp = E$$

et

$$\left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

1.6 Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de F et $x \in E$. Alors, le projeté orthogonal de x sur F est donné par

$$p(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle x|e_k\rangle\, e_k.$$

Si H est un hyperplan de E, autrement dit s'il existe $n \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $H = \operatorname{Vect}(n)^\perp$, alors le projeté orthogonal de x sur H est donné par

$$p(x) = x - \frac{\langle x|n\rangle\, n}{\|n\|^2}.$$

1.7 Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet. Comment je n'ai pas défini c'est quoi un espace complet ? C'est un espace métrique dont les suites de Cauchy convergent. Un espace métrique ? Une suite de Cauchy ? Attendez, pas tout le monde à la fois. Un espace métrique c'est un espace muni d'une distance. Oui bah une distance c'est une application de E^2 dans $\mathbb{R}_+$, symétrique, définie et vérifiant l'inégalité triangulaire. Les suites de Cauchy ce sont des suites dont la distance entre deux termes converge uniformé... ok vous savez quoi ? $\mathbb{R}^3$ est un espace de Hilbert, ça vous va ? Si, si $\mathbb{R}^3$ c'est à lui. Qu'est-ce que vous fichez dans son espace ? Il est au courant ? Oh vous pouvez toujours rajouter le temps ou vous projeter au sol, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ aussi sont à lui.

Révisions

1.8 On a les développements limités usuels suivants :

e^x	$\underset{x\to 0}{=}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$
$\sin(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x-\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\cos(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$
$\arctan(x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\frac{1}{1+x}$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)$
$\ln(1+x)$	$\underset{x\to 0}{=}$	$x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+o\left(x^n\right)$
$(1+x)^\alpha$	$\underset{x\to 0}{=}$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$

2. **Montrer qu'une application est un produit scalaire.**

2.1 Soit $E=\mathscr{C}^1([0;1])$. Pour tout $(f,g)\in E^2$, f, g, f' et g' sont continues sur $[0;1]$ donc $fg+f'g'$ également. Donc $\varphi(f,g)$ pour tout $(f,g)\in E^2$. Donc φ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(f,g,h)\in E^2$ et tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*

$$\varphi(f,g)=\int_0^1 (f(t)g(t)+f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^1 (g(t)f(t)+g'(t)f'(t))\,\mathrm{d}t=\varphi(g,f)\,.$$

- *(bilinéarité)*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+\mu h,g)&=\int_0^1\left((\lambda f(t)+\mu h(t))\,g(t)+(\lambda f+\mu h)'(t)g'(t)\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1(\lambda f(t)g(t)+\mu h(t)g(t)+\lambda f'(t)g'(t)+\mu h'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t\\&=\lambda\int_0^1(f(t)g(t)+f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t+\mu\int_0^1(h(t)g(t)+h'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t\\&=\lambda\,\varphi(f,g)+\mu\,\varphi(h,g)\,.\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- *(positive)*

$$\varphi(f,f)=\int_0^1\left(f(t)^2+f'(t)^2\right)\mathrm{d}t$$

Pour tout $t\in[0;1]$, $f(t)^2+f'(t)^2\geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(f,f)\geqslant 0.$$

- *(définie)* Supposons $\varphi(f,f)=0$. La fonction $t\mapsto f(t)^2+f'(t)^2$ est **continue** sur $[0,1]$, **positive**, **d'intégrale nulle**. Donc par le principe de séparation de l'intégrale, $\forall t\in[0;1]$, $f(t)^2+f'(t)^2=0$. Or la somme de deux réels positifs est nulle si les deux réels sont nuls :

$$\forall t\in[0;1]\ \begin{cases}f(t)=0\\f'(t)=0\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad f=0_E.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi\text{ est un produit scalaire sur }E=\mathscr{C}^1([0;1]).}$$

2.2 Soit $E=\mathbb{C}$ vu en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La fonction φ est bien définie sur $\mathbb{C}^2$ et renvoie bien un réel. De plus, pour tout $(z,z',z'')\in E^2$ et tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*

$$\begin{aligned}\varphi(z,z') = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) &= \mathrm{Re}\left(\overline{z\overline{z'}}\right) && \text{car } \mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(\overline{a}) \\ &= \mathrm{Re}\left(\overline{z}z'\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(z'\overline{z}\right) && = \varphi(z',z).\end{aligned}$$

- *(bilinéarité)*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda z + \mu z', z'') &= \mathrm{Re}\left((\lambda z + \mu z')\overline{z''}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\lambda z\overline{z''} + \mu z'\overline{z''}\right) \\ &= \lambda\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z''}\right) + \mu\mathrm{Re}\left(z'\overline{z''}\right) && \text{car } \lambda\in\mathbb{R} \text{ et } \mu\in\mathbb{R} \\ &= \lambda\,\varphi(z,z'') + \mu\,\varphi(z',z'').\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.
- *(positive)*

$$\varphi(z,z) = \mathrm{Re}(z\overline{z}) = \mathrm{Re}\left(|z|^2\right) = |z|^2 \qquad \text{car } |z|^2 \in \mathbb{R}$$

  Donc

$$\varphi(z,z) \geqslant 0.$$

- *(définie)* Supposons $\varphi(z,z) = 0$. Par ce qui précède, on a alors $|z|^2 = 0$ i.e. $z = 0$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{C}.}$$

2.3 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $(P,Q)\in E^2$, $t\mapsto P(t)$ et $t\mapsto Q(t)$ sont deux fonctions continues sur $[0;1]$ en tant que fonction polynomiale. Donc $t\mapsto t^nP(t)Q(t)$ aussi et donc $\varphi(P,Q) = \int_0^1 t^nP(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci étant vrai pour tout $(P,Q)\in E^2$, on en déduit que φ est bien définie sur E^2 et renvoie bien un réel. De plus, pour tout $(P,Q,R)\in E^3$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 t^nP(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^nQ(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(Q,P).$$

- *(bilinéarité)*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \int_0^1 t^n\left(\lambda P(t) + \mu Q(t)\right)R(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^1 t^nP(t)R(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_0^1 t^nQ(t)R(t)\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda\,\varphi(P,R) + \mu\,\varphi(Q,R).\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.
- *(positive)*

$$\varphi(P,P) = \int_0^1 t^nP(t)^2\,\mathrm{d}t$$

  Pour tout $t\in[0;1]$, $P(t)^2 \geqslant 0$ et $t^n \geqslant 0$ car $t\geqslant 0$. Donc pour tout $t\in[0;1]$, $t^nP(t)^2\geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(P,P) \geqslant 0.$$

- *(définie)* Supposons $\varphi(P,P) = 0$. La fonction $t\mapsto t^nP(t)^2$ est **continue** sur $[0,1]$, **positive**, **d'intégrale nulle**. Donc par le principe de séparation de l'intégrale, $\forall t\in[0;1]$, $t^nP(t)^2 = 0$. Or pour tout $t\in\,]0;1]$, $t^n\neq 0$, donc $\forall t\in\,]0;1]$, $P(t) = 0$. Donc le polynôme P possède une infinité de racines. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}[X].}$$

2.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $a_i > 0$. Pour tout $(X, Y) \in E^2$, $X^T \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $X^T DY$ et appartient à $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ i.e. est un réel. Donc φ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(X, Y, Z) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)* $\varphi(X, Y) = X^T DY$. Puisque $X^T DY \in \mathbb{R}$, $X^T DY = \left(X^T DY\right)^T$. Par propriété,
$$\begin{aligned}\varphi(X, Y) = X^T DY &= \left(X^T DY\right)^T \\ &= Y^T D^T \left(X^T\right)^T \\ &= Y^T DX \qquad \text{car } D \text{ est symétrique car diagonale} \qquad = \varphi(Y, X).\end{aligned}$$
- *(bilinéarité)*
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda X + \mu Y, Z) &= (\lambda X + \mu Y)^T DZ \\ &= \left(\lambda X^T + \mu Y^T\right) DZ \qquad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda X^T DZ + \mu Y^T DZ \\ &= \lambda \varphi(X, Z) + \mu \varphi(Y, Z).\end{aligned}$$
Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.
- *(positive)*
$$\varphi(X, X) = X^T DX.$$
Notons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Dès lors,
$$\varphi(X, X) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{bmatrix}$$
$$= a_1 x^2 + \cdots + a_n x_n^2.$$
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $a_i > 0$, donc $a_i x_i^2 \geqslant 0$ et donc
$$\varphi(X, X) \geqslant 0.$$
- *(définie)* Supposons $\varphi(X, X) = 0$. Par ce qui précède, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 = 0$. Puisque pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $a_k x_k^2 \geqslant 0$, on en déduit que nécessairement,
$$\forall k \in [\![1; n]\!], \qquad a_k x_k^2 = 0.$$
Or pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $a_k > 0$. Donc $x_k = 0$ et finalement $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Conclusion,
$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}^n.}$$

2.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. La fonction φ est bien définie sur E^2 et est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*
$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k) P^{(k)}(k) = \varphi(Q, P).$$
- *(bilinéarité)*
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + \mu Q)^{(k)}(k) R^{(k)}(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k) R^{(k)}(k) + \mu \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k) R^{(k)}(k) \\ &= \lambda \varphi(P, R) + \mu \varphi(Q, R).\end{aligned}$$
Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- *(positive)*
$$\varphi(P,P)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(k)P^{(k)}(k)=\sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(k)\right)^2.$$
En tant que somme de termes positifs,
$$\varphi(P,P)\geqslant 0.$$
- *(définie)* Supposons $\varphi(P,P)=0$ alors $\sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(k)\right)^2=0$. Puisque les termes sont positifs,
$$\forall k\in[\![0;n]\!],\qquad P^{(k)}(k)=0.$$
Puisque $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $P^{(n)}\in\mathbb{R}_0[X]$ est constant (éventuellement nul). Or $P^{(n)}(n)=0$. Donc $P^{(n)}=0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $P^{(n-1)}$ est constant. Or $P^{(n-1)}(n-1)=0$ donc $P^{(n-1)}=0_{\mathbb{R}[X]}$. Par récurrence, on en déduit que $P^{(0)}=0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.
On peut aussi procéder par l'absurde. Supposons $P\neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Soit d son degré et a_d son coefficient dominant. Dès lors, $P^{(d)}=d!a_d$. Puisque $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $d\in[\![0;n]\!]$. Donc $P^{(d)}(d)=0$. D'où $d!a_d=0$ impossible. Donc $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Conclusion,
$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E=\mathbb{R}_n[X].}$$

3. **Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**

3.1 Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $\forall(P,Q)\in\mathbb{R}_2[X]^2$, $\langle P|Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On sait que $\left(1,X,X^2\right)$ est une base de E. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille. Posons $g_1=1$. On a
$$\|g_1\|^2=\langle g_1|g_1\rangle=\int_{-1}^{1}1\,\mathrm{d}t=2.$$
Posons $n_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et
$$g_2=X-\lambda n_1.$$
On a alors,
$$\langle g_2|n_1\rangle=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\langle X|n_1\rangle-\lambda\langle n_1|n_1\rangle=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\lambda=\langle X|n_1\rangle.$$
Donc
$$\lambda=\int_{-1}^{1}t\times\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2\sqrt{2}}\right]_{t=-1}^{t=1}=0.$$
Donc $g_2=X$ puis,
$$\|g_2\|^2=\langle g_2|g_2\rangle=\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=1}=\frac{2}{3}.$$
Posons $n_2=\sqrt{\frac{3}{2}}X$ puis pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $g_3=X^2-\lambda n_1-\mu n_2$. Alors,
$$\begin{cases}\langle g_3|n_1\rangle=0\\\langle g_3|n_2\rangle=0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}\left\langle X^2\middle|n_1\right\rangle-\lambda=0\\\left\langle X^2\middle|n_2\right\rangle-\mu=0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}\lambda=\left\langle X^2\middle|n_1\right\rangle\\\mu=\left\langle X^2\middle|n_2\right\rangle.\end{cases}$$
D'où
$$\lambda=\int_{-1}^{1}t^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$
et
$$\mu=\int_{-1}^{1}t^2\times\sqrt{\frac{3}{2}}t\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}t^3\,\mathrm{d}t=0\qquad\text{car la fonction est impaire.}$$
Ainsi, $g_3=X^2-\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=X^2-\frac{1}{3}$. Enfin,
$$\|g_3\|^2=\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}t^4-\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{9}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{8}{45}.$$

On pose $n_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(3X^2 - 1\right)$. Conclusion, une base orthonormée de E est donnée par

$$\boxed{(n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(3X^2 - 1\right)\right).}$$

3.2 Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z - t = 0\right\}$. Commençons par déterminer une base de F. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$u \in F \quad\Leftrightarrow\quad x + y + z - t = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t = x + y + z \quad\Leftrightarrow\quad u = (x, y, z, x + y + z).$$

Donc

$$F = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right)}_{=(e_1,e_2,e_2)=\mathscr{B}_F}.$$

La famille $\mathscr{B}_F$ est génératrice de F. Montrons qu'elle est libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 + \lambda_3\, e_3 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Alors, $\begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\end{cases}$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Comme elle engendre aussi F, $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Posons $g_1 = e_1$. On a

$$\|e_1\|^2 = \langle e_1 | e_1\rangle = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle = 2.$$

Posons $n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ puis pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $g_2 = e_2 - \lambda\, n_1$. On a

$$\langle g_2 | n_1\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \langle e_2 | n_1\rangle - \lambda \langle n_1 | n_1\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \langle e_2 | n_1\rangle - \lambda = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \langle e_2 | n_1\rangle.$$

Donc

$$\lambda = \left\langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc $g_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\1\\0\\1/2\end{bmatrix}$. Dès lors,

$$\|g_2\|^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Posons $n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$. Puis, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $g_3 = e_3 - \lambda\, e_1 - \mu e_2$. Dès lors,

$$\begin{cases}\langle g_3 | n_1\rangle = 0\\ \langle g_3 | n_2\rangle = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\langle e_3 | n_1\rangle - \lambda = 0\\ \langle e_3 | n_2\rangle - \mu = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\lambda = \langle e_3 | n_1\rangle\\ \mu = \langle e_3 | n_2\rangle.\end{cases}$$

Donc

$$\lambda = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\mu = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

D'où

$$g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Enfin, $\|g_3\|^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1 + \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$. Donc

$$n_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base orthonormée de } F.}$$

3.3 Soit $E = \operatorname{Vect}(\operatorname{sh}, \operatorname{ch})$ muni du produit scalaire : $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f|g \rangle = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(1)g''(1)$. La famille $\mathscr{B}_E = (\operatorname{sh}, \operatorname{ch})$ est par définition génératrice de E, elle est de plus libre car sh et ch ne sont pas colinéaires : soit $(a,b) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \operatorname{sh} + b \operatorname{ch} = 0_E.$$

Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a \operatorname{sh}(x) + b \operatorname{ch}(x) = 0$. En particulier, si $x = 0$, on obtient $b = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a \operatorname{sh}(x) = 0$ et donc pour $x = 1$ par exemple, $a = 0$. Donc $a = b = 0$ et $\mathscr{B}_E$ est libre et génératrice donc $\mathscr{B}_E$ base de E. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schimdt à $\mathscr{B}_E$. Posons $g_1 = \operatorname{sh}$. Alors,

$$\|g_1\|^2 = \langle \operatorname{sh}|\operatorname{sh} \rangle = \operatorname{sh}^2(0) + \operatorname{ch}^2(0) + \operatorname{sh}^2(1) = 0 + 1 + \operatorname{sh}^2(1) = \operatorname{ch}^2(1).$$

On pose alors $n_1 = \frac{1}{\operatorname{ch}(1)} \operatorname{sh}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $g_2 = \operatorname{ch} - \lambda n_1$. Alors,

$$\langle g_2|n_1 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \operatorname{ch}|n_1 \rangle - \lambda \langle n_1|n_1 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \langle \operatorname{ch}|n_1 \rangle = \frac{1}{\operatorname{ch}(1)} \langle \operatorname{ch}|\operatorname{sh} \rangle.$$

Donc

$$\lambda = \frac{1}{\operatorname{ch}(1)} (\operatorname{ch}(0)\operatorname{sh}(0) + \operatorname{sh}(0)\operatorname{ch}(0) + \operatorname{ch}(1)\operatorname{sh}(1)) = \operatorname{sh}(1).$$

Ainsi, $g_2 = \operatorname{ch} - \frac{\operatorname{sh}(1)}{\operatorname{ch}(1)} \operatorname{sh}$. Puis,

$$\begin{aligned}
\|g_2\|^2 &= \left(\operatorname{ch}(0) - \frac{\operatorname{sh}(1)}{\operatorname{ch}(1)} \operatorname{sh}(0)\right)^2 + \left(\operatorname{sh}(0) - \frac{\operatorname{sh}(1)}{\operatorname{ch}(1)} \operatorname{ch}(0)\right)^2 + \left(\operatorname{ch}(1) - \frac{\operatorname{sh}(1)}{\operatorname{ch}(1)} \operatorname{sh}(1)\right)^2 \\
&= 1 + \frac{\operatorname{sh}^2(1)}{\operatorname{ch}^2(1)} + \left(\frac{\operatorname{ch}^2(1) - \operatorname{sh}^2(1)}{\operatorname{ch}(1)}\right)^2 \\
&= \frac{\operatorname{ch}^2(1) + \operatorname{sh}^2(1)}{\operatorname{ch}^2(1)} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(1)} \\
&= \frac{2\operatorname{ch}^2(1)}{\operatorname{ch}^2(1)} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Posons $n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{ch} - \frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}\,\mathrm{sh}\right)$. Conclusion,

$$\boxed{(n_1, n_2) = \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(1)}\,\mathrm{sh}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{ch} - \frac{\mathrm{sh}(1)}{\mathrm{ch}(1)}\,\mathrm{sh}\right)\right) \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

3.4 Soit $F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a - b + c - d = 0 \right\}$. Déterminons une base de F. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$M \in F \quad \Leftrightarrow \quad a - b + c - d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = a - b + c \quad \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a - b + c \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$F = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_F = (E_1, E_2, E_3)}.$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F. Montrons que $\mathscr{B}_F$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aE_1 + bE_2 + cE_3 = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a - b + c \end{pmatrix} = 0_2 \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0.$$

Donc $\mathscr{B}_F$ est libre et engendre F. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Appliquons le procédé d'orthonormalisation à $\mathscr{B}_F$. Posons $g_1 = E_1$, on a

$$\|E_1\|^2 = 1 + 1 = 2.$$

Posons $n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $g_2 = E_2 - \lambda\, n_1$. Alors,

$$\langle g_2 | n_1 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle E_2 | n_1 \rangle - \lambda \langle n_1 | n_1 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle E_2 | n_1 \rangle - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \langle E_2 | n_1 \rangle.$$

Donc

$$\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dès lors,

$$\|g_2\|^2 = \frac{1}{4}(1 + 4 + 9) = \frac{7}{2}.$$

Posons $n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Puis, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $g_3 = e_3 - \lambda\, n_1 - \mu n_2$. Dès lors,

$$\begin{cases} \langle g_3 | n_1 \rangle = 0 \\ \langle g_3 | n_2 \rangle = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle E_3 | n_1 \rangle - \lambda = 0 \\ \langle E_3 | n_2 \rangle - \mu = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \langle E_3 | n_1 \rangle \\ \mu = \langle E_3 | n_2 \rangle. \end{cases}$$

Donc

$$\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\mu = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

D'où

$$\begin{aligned} g_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{14}} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, $\|g_3\|^2 = \frac{1}{49}(25+9+49+1) = \frac{64}{49}$. Donc

$$n_3 = \frac{7}{8} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(n_1, n_2, n_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base orthonormée de } F.}$$

3.5 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $\forall (P, Q) \in E^2$, $\langle P|Q\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi P(\cos(\theta))\, Q(\cos(\theta))\, \mathrm{d}t$. On sait que $(1, X, X^2)$ est une base de E. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Posons $g_1 = 1$. On a

$$\|g_1\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 1\, \mathrm{d}t = 1$$

Donc on pose $n_1 = 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_2 = X - \lambda n_1$. On a

$$\langle g_2|n_1\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle X|n_1\rangle - \lambda\langle n_1|n_1\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle X|n_1\rangle - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \langle X|n_1\rangle.$$

Donc

$$\lambda = \langle X|1\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $g_2 = X - \frac{\pi}{2}$. Puis,

$$\|g_2\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{4}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{2} + \frac{\pi^3}{4}\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

Posons $n_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(X - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2}{\pi}X - 1\right)$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $g_3 = X^2 - \lambda n_1 - \mu n_2$. Dès lors,

$$\begin{cases} \langle g_3|n_1\rangle = 0 \\ \langle g_3|n_2\rangle = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle X^2|n_1\rangle - \lambda = 0 \\ \langle X^2|n_2\rangle - \mu = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \langle X^2|n_1\rangle \\ \mu = \langle X^2|n_2\rangle. \end{cases}$$

Donc

$$\lambda = \langle X^2|1\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}.$$

et

$$\mu = \left\langle X^2 \middle| \sqrt{3}\left(\frac{2}{\pi}X - 1\right)\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int_0^\pi \frac{2}{\pi}t^3 - t^2\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{2\pi^3}{4} - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}.$$

D'où

$$g_3 = X^2 - \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}\sqrt{3}\left(\frac{2}{\pi}X - 1\right) = X^2 - \pi X + \frac{\pi^2}{6}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\|g_3\|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^4 + \pi^2 t^2 + \frac{\pi^4}{36} - 2\pi t^3 + \frac{\pi^2}{3}t^2 - \frac{\pi^3}{3}t\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^4 - 2\pi t^3 + \frac{4\pi^2}{3}t^2 - \frac{\pi^3}{3}t + \frac{\pi^4}{36}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^5}{5} - \frac{2\pi^5}{4} + \frac{4\pi^5}{9} - \frac{\pi^5}{6} + \frac{\pi^5}{36}\right) \\
&= \pi^4\left(\frac{1}{5} - \frac{18}{36} + \frac{16}{36} - \frac{6}{36} + \frac{1}{36}\right) \\
&= \pi^2\left(\frac{36}{180} - \frac{35}{180}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{180}.
\end{aligned}$$

Donc

$$n_3 = \frac{6\sqrt{5}}{\pi}\left(X^2 - \pi X + \frac{\pi^2}{6}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{6}{\pi}X^2 - 6X + \pi\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{(n_1, n_2, n_3) = \left(1, \sqrt{3}\left(\frac{2}{\pi}X - 1\right), \sqrt{5}\left(\frac{6}{\pi}X^2 - 6X + \pi\right)\right) \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

4. **Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.**

4.1 Soit $F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y - z = 0 \right\}$ Déterminons une base de F. On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = x + y \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})}. \end{aligned}$$

Dès lors, pour $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in F^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{e_1} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{e_2} \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} -z \\ -z \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F^\perp = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

On retrouve une propriété générale de géométrie : $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan affine et $\overrightarrow{n}\,(a, b, c)$ est toujours un vecteur normal à ce plan.

4.2 Soit $F = \left\{ aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \,\middle|\, \begin{cases} a + b + c + 4d = 0 \\ a + 2b + 4c + 6d = 0 \end{cases} \right\}$. Déterminons une base de F. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b + c + 4d = 0 \\ a + 2b + 4c + 6d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b + c + 4d = 0 \\ b + 3c + 2d = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -b - c - 4d = 3c + 2d - c - 4d = 2c - 2d \\ b = -3c - 2d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad P = (2c - 2d)\,X^3 - (3c + 2d)\,X^2 + cX + d \\ &\Leftrightarrow \quad P = c\left(2X^3 - 3X^2 + X\right) - d\left(2X^3 + 2X^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Donc
$$F = \text{Vect}\left(2X^3 - 3X^2 + X, 2X^3 + 2X^2 - 1\right).$$
Dès lors, pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\begin{aligned}
P \in F^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left\langle P \middle| 2X^3 - 3X^2 + X \right\rangle = 0 \\ \left\langle P \middle| 2X^3 + 2X^2 - 1 \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} d \times 1 + c \times 1 + (2b)(-6) + (6a)(12) = 0 \\ d \times (-1) + c \times 0 + (2b)(4) + (6a)(12) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 72a - 12b + c + d = 0 \\ 72a + 8b - d = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 72a - 12b + c + d = 0 \\ d = 72a + 8b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = -72a + 12b - d = -72a + 12b - 72a - 8b = -144a + 4b \\ d = 72a + 8b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad P = aX^3 + bX^2 - 144aX + 4bX + 72a + 8b \\
&\Leftrightarrow \quad P = a\left(X^3 - 144 + 72\right) + b\left(X^2 + 4X + 8\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,
$$\boxed{F^{perp} = \text{Vect}\left(X^3 - 144 + 72, X^2 + 4X + 8\right).}$$

4.3 Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle$. Montrons que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)^\perp$. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Montrons que $y \in \text{Ker}(f)^\perp$. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Puisque $y \in \text{Im}(f)$, il existe $t \in E$ tel que $y = f(t)$ et $x \in \text{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0_E$. On a alors,
$$\begin{aligned}
\langle x|y\rangle = \langle x|f(t)\rangle &= \langle f(x)|t\rangle \qquad \text{par hypothèse sur } f \\
&= \langle 0_E|t\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \text{Ker}(f)$, on a $y \in \text{Ker}(f)^\perp$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \text{Im}(f)$, on obtient que
$$\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(f)^\perp.$$
Puisque E est euclidien, il est de dimension finie. Donc, par le théorème du rang car E est de dimension finie,
$$\dim\left(\text{Ker}(f)^\perp\right) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \text{rg}(f).$$
Donc $\dim\left(\text{Ker}(f)^\perp\right) = \dim(\text{Im}(f))$. A l'aide de l'inclusion, $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(f)^\perp$, on en conclut que
$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)^\perp.}$$

4.4 Soit $E = \mathscr{C}^2([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\forall (f,g) \in E^2$, $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Posons $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Soit $(f,g) \in F \times G$. On a
$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Posons $u = f$ et $v = g'$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et $u' = f'$ et $v' = g''$. Donc par intégration par parties dans l'intégrale de droite,
$$\begin{aligned}
\langle f|g\rangle &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + [f(t)g'(t)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + f(1)g'(1) + f(0)g'(0) - \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } g'' = g \text{ car } g \in G \\
&= f(1)g'(1) + f(0)g'(0) \\
&= 0 \qquad \text{car } f(0) = f(1) = 0 \text{ car } f \in F.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux.}}$$

En particulier, F et G sont en somme directe. Ce qui peut aussi se démontrer par le théorème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre 2 qui garantit que la seule fonction dans F et G est la solution nulle ! On peut aussi démontrer par un raisonnement d'analyse-synthèse que les deux espaces sont même supplémentaires.

4.5 Soit $(A,B) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\langle A|B\rangle = 0$. On a d'une part,

$$\langle A|B\rangle = \operatorname{Tr}\left(A^T B\right) = \operatorname{Tr}(AB) \qquad \text{car } A \text{ est symétrique.}$$

D'autre part, par symétrie du produit scalaire,

$$\begin{aligned}
\langle A|B\rangle = \langle B|A\rangle = \operatorname{Tr}\left(B^T A\right) &= \operatorname{Tr}(-BA) && \text{car } B \text{ est antisymétrique}\\
&= -\operatorname{Tr}(BA) && \text{par linéarité de la trace}\\
&= -\operatorname{Tr}(AB) && \text{par propriété de la trace}\\
&= -\langle A|B\rangle && \text{par ce qui précède.}
\end{aligned}$$

Donc $\langle A|B\rangle = 0$. Ainsi,

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sont orthogonaux entre eux.}$$

Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors par ce qui précède, pour tout $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\langle A|B\rangle = 0$. Donc $A \in \mathscr{S}(\mathbb{R})^\perp$. D'où

$$\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R})^\perp.$$

Réciproquement, soit $A \in \mathscr{S}(\mathbb{R})^\perp$. Donc pour tout $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\langle A|B\rangle = 0$. Montrons que $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On observe que

$$A = \underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{=A_1} + \underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{=A_2}.$$

Par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\forall B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \quad 0 = \langle A|B\rangle = \langle A_1|B\rangle + \langle A_2|B\rangle.$$

Or on observe que $A_2 \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ donc par ce qui précède, $\langle A_2|B\rangle = 0$. D'où

$$\forall B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A_1|B\rangle = 0.$$

Or $A_1 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Donc pour $B = A_1$, on a $0 = \langle A_1|A_1\rangle = \|A_1\|^2$. Donc par le caractère défini du produit scalaire, $A_1 = 0_n$. D'où

$$A = A_2 \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

On a donc établi que

$$\mathscr{S}(\mathbb{R})^\perp \subseteq \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).}$$

Puisque l'on est en dimension finie, on obtient

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

5. **Distance à un sous-espace vectoriel.**

5.1 Soient $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \right\}$ et $x = (1,2,3,4)$. Cherchons une base de F. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes,

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -2y-2t=0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -y-z-t = t-z-t = -z \\ y = -t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$F = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}_{=(u_1,u_2)}$$

On observe que u_1 et u_2 sont orthogonaux donc la famille (u_1,u_2) est libre et engendre F et donc est une base de F. Posons

$$n_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, (n_1,n_2) forme une base orthonormée de F. Le projeté orthogonal de x sur F est alors donné par

$$\begin{aligned} p_F(x) &= \langle x | n_1 \rangle n_1 + \langle x | n_2 \rangle n_2 \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4+9+4+9} = \sqrt{26}.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(x,F) = \sqrt{26}.}$$

5.2 Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel : $\forall (A,B) \in E^2$, $\operatorname{Tr}\left(A^T B\right)$. Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. On a

$$F = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=(e_1,e_2)}.$$

La famille (e_1, e_2) est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires et engendre F donc constitue une base de F. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On a

$$\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1 | e_1 \rangle} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Posons $n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_2 = e_2 - \lambda n_1$. On a

$$\langle g_2 | n_1 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle e_2 | n_1 \rangle - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \langle e_2 | n_1 \rangle.$$

Donc

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+1+0+0) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Donc

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis, $\|g_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+1+4+1} = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Posons,

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille (n_1, n_2) est alors une base orthonormée de F. Donc, avec p_F la projection orthogonale sur F,

$$\begin{aligned}
d(C,F) &= \|C - p_F(C)\| \\
&= \|C - \langle C | n_1 \rangle n_1 - \langle C | n_2 \rangle n_2\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{7} \left\| \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \frac{\sqrt{1+1+4+36}}{7} \\
&= \sqrt{\frac{6}{7}}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d(C,F) = \sqrt{\frac{6}{7}}.}$$

5.3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire : $\forall (P,Q) \in E^2$, $\langle P | Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P'(0)Q'(0) + P'(1)Q'(1)$. Soient $U = X^3 + X^2 + X + 1$ à $F = \operatorname{Vect}\left(X^2 - X, X^3 - 1\right)$. Posons $e_1 = X^2 - X$ et $e_2 = X^3 - 1$, la famille (e_1, e_2) est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires et par définition engendre F donc forme une base de F. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On a $e_1 = X^2 - X$ et $e_1' = 2X - 1$. Donc

$$\|e_1\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Posons

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^2 - X\right).$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_2 = e_2 - \lambda\, n_1$. On a

$$\langle g_2 | n_1 \rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle e_2 | n_1 \rangle - \lambda = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \langle e_2 | n_1 \rangle .$$

Or $e_2 = X^3 - 1$, $e_2' = 3X^2$, $n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^2 - X\right)$, $n_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2X - 1\right)$. Donc

$$\lambda = 0 + 0 + 0 + 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Donc $g_2 = X^3 - 1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^2 - X\right) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1$. Donc $g_2' = 3X^2 - 3X + \frac{3}{2}$. Donc

$$\|g_2\| = \sqrt{1 + 0 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}.$$

Enfin, posons

$$n_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1\right).$$

La famille (n_1, n_2) est une base orthonormée de F. Dès lors, en notant p_F la projection orthogonal sur F,

$$\begin{aligned}
d\left(U, F\right) &= \|U - p_F(U)\| \\
&= \|U - \langle U | n_1 \rangle\, n_1 - \langle U | n_2 \rangle\, n_2\| \\
&= ||X^3 + X^2 + X + 1 - \left\langle X^3 + X^2 + X + 1 \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^2 - X\right)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^2 - X\right) \\
&\qquad - \left\langle X^3 + X^2 + X + 1 \middle| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1\right)\right\rangle \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1\right) || \\
&= ||X^3 + X^2 + X + 1 - \frac{1}{2}\left\langle X^3 + X^2 + X + 1 \middle| \left(X^2 - X\right)\right\rangle \left(X^2 - X\right) \\
&\qquad - \frac{2}{11}\left\langle X^3 + X^2 + X + 1 \middle| X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1\right\rangle \left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1\right) || \\
&= ||X^3 + X^2 + X + 1 - \frac{1}{2}\left(0 + 0 - 1 + 6 \times 1\right)\left(X^2 - X\right) \\
&\qquad - \frac{2}{11}\left(-1 + 0 + \frac{3}{2} + 6 \times \frac{3}{2}\right)\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1\right) || \\
&= \left\| X^3 + X^2 + X + 1 - \frac{5}{2}\left(X^2 - X\right) - \frac{19}{11}\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X - 1\right) \right\| \\
&= \frac{1}{22}\left\| \left(22 - 38\right)X^3 + \left(22 - 55 + 57\right)X^2 + \left(22 + 55 - 57\right)X + 22 + 38 \right\| \\
&= \frac{1}{22}\left\| -16X^3 + 24X^2 + 20X + 60 \right\| \\
&= \frac{1}{22}\sqrt{60^2 + 48^2 + 20^2 + \left(-48 + 48 + 20\right)^2} \\
&= \frac{4}{22}\sqrt{15^2 + 14^2 + 5^2 + 5^2} \\
&= \frac{2}{11}\sqrt{225 + 195 + 50} \\
&= \frac{2}{11}\sqrt{470}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(U, F) = \frac{2}{11}\sqrt{470}.}$$

ouf!!

5.4 Posons $U = X^2$. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on peut montrer (exo !) que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \qquad \langle P|Q\rangle = \sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i),$$

définit un produit scalaire sur E. Posons $F = \mathbb{R}_1[X]$. Alors $(1, X)$ est une base de F. Appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt. On a

$$\|1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Posons

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_2 = X - \lambda n_1$. On a

$$\langle g_1|n_1\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle X|n_1\rangle - \lambda = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \langle X|n_1\rangle .$$

Donc

$$\lambda = \left\langle X \middle| \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (0+1+2) = \sqrt{3}.$$

Donc $g_2 = X - 1$. Ensuite,

$$\|g_2\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}.$$

Posons

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (X-1) .$$

Alors la famille (n_1, n_2) est une base orthonormée de F. Donc, en notant p_F la projection orthogonale sur F,

$$\begin{aligned}
\inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \sum_{i=0}^{2} \left(i^2 - P(i)\right)^2 &= \inf_{P \in F} \left\|X^2 - P\right\|^2 \\
&= d\left(X^2, F\right)^2 \\
&= \left\|X^2 - p_F\left(X^2\right)\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - \left\langle X^2|n_1\right\rangle n_1 - \left\langle X^2|n_2\right\rangle n_2\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - \frac{1}{3}\left\langle X^2|1\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle X^2|X-1\right\rangle (X-1)\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - \frac{1}{3}(0+1+4) - \frac{1}{2}(0+0+4)(X-1)\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - \frac{5}{3} - 2\left(X^2 - 2X + 1\right)\right\|^2 \\
&= \left\|-X^2 + 4X - \frac{11}{3}\right\|^2 \\
&= \frac{121}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} \\
&= \frac{126}{9}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \sum_{i=0}^{2} \left(i^2 - P(i)\right)^2 = 14.}$$

5.5 Posons $U = X^2$. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on peut montrer (exo !) que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \qquad \langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

définit un produit scalaire sur E. Posons $F = \mathbb{R}_1[X]$. Alors $(1, X)$ est une base de F. Appliquons l'algorithme de Gram-Schmidt. On a

$$\|1\| = 1.$$

Posons

$$n_1 = 1.$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_2 = X - \lambda n_1$. On a

$$\langle g_1 | n_1 \rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle X | n_1 \rangle - \lambda = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \langle X | n_1 \rangle .$$

Donc

$$\lambda = \langle X | 1 \rangle = \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Donc $g_2 = X - \frac{1}{2}$. Ensuite,

$$\|g_2\| = \sqrt{\int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4} \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Posons

$$n_2 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,(2X - 1)\,.$$

Alors la famille (n_1, n_2) est une base orthonormée de F. Donc, en notant p_F la projection orthogonale sur F,

$$\begin{aligned}
\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t &= \inf_{P\in F} \int_0^1 \left(t^2 - P\right)^2 \mathrm{d}t \\
&= \inf_{P\in F} \left\|X^2 - P\right\|^2 \\
&= d\left(X^2, F\right)^2 \\
&= \left\|X^2 - p_F\left(X^2\right)\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - \left\langle X^2 | n_1\right\rangle n_1 - \left\langle X^2 | n_2 \right\rangle n_2\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - \left\langle X^2 | 1\right\rangle - 3\left\langle X^2 | 2X - 1\right\rangle (2X-1)\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - \frac{1}{3} - 3\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right)(2X-1)\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(2X-1)\right\|^2 \\
&= \left\|X^2 - X + \frac{1}{6}\right\|^2 \\
&= \int_0^1 t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \\
&= \frac{1}{5} + \frac{-18 + 16 - 6 + 1}{36} \\
&= \frac{36 - 35}{180} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{180}.}$$