Interrogation 18 d'entrainement
Séries numériques

1. **Restituer le cours.**

   1.1 Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général ? Donner un contre-exemple à la réciproque.

   1.2 Enoncer le théorème sur les séries de Riemann.

   1.3 Enoncer le théorème de comparaison.

   1.4 Enoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.

   1.5 Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?

   1.6 Quel est le contraire d'un film d'horreur ?

   Révisions

   1.7 Enoncer le théorème d'encadrement.

   1.8 Enoncer la caractérisation séquentielle de la limite.

   1.9 Enoncer la propriété donnant l'image d'un segment...

   1.10 Enoncer l'identité des accroissements finis.

2. **Nature d'une série par équivalent.**

   2.1 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n+3^n}{5n^3-\ln(n)+5^n}$.

   2.2 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

   2.3 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.

   2.4 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

   2.5 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=-\left[2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

3. **Théorème de comparaison.**

   3.1 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}$.

   3.2 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^3}$.

   3.3 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note r_n le reste de n par la division euclidienne par 5.

   Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^{-r_n}}{\sqrt{n}}$.

   3.4 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln^3(n)}$.

   3.5 Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{|P(n)|}{2^n}$, où $P\in\mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé.

4. **Convergence absolue.**

   4.1 Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+(-1)^n}}$.

   4.2 Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ en admettant que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

   4.3 Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

   4.4 Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$.

   4.5 Soit $\omega \in \mathbb{U}_{12}$ une racine douzième de l'unité. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+\omega^n}{n^3}$.

5. **Calcul et estimation**

   5.1 Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge et calculer sa somme totale.

   5.2 Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{ch}(n)}{4^n}$ converge et calculer sa somme totale.

   5.3 Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{(n+1)!}$ converge et calculer sa somme totale.

   5.4 Par un encadrement série-intégrale, déterminer un équivalent des sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n}$.

   5.5 Par un encadrement série-intégrale, déterminer un équivalent du reste de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+1}$. *On pourra admettre la convergence de la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+1}$.

   5.6 Par un encadrement série-intégrale, montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(n\,\mathrm{e}^{-n}\right)$ et (pour les plus courageux) $n\,\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-k}\right)$. *On pourra admettre la convergence de la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathrm{e}^{-n}$.

6. **BONUS : ne sera pas à l'interrogation. Manipuler un grand $\mathcal{O}$.**

   6.1 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2+12n-1$ et $v_n = -2n^2+4$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.

   6.2 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 5(-1)^n + \cos\left(5n^3\right)$ et $v_n = 1$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$ (on pourra admettre que u_n ne s'annule pas).

   6.3 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{-1}{n^2} + \frac{2}{n^3}$ et $v_n = \frac{1}{n^3}$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.

   6.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.

   6.5 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}$ et $v_n = u_n^2$.
   Déterminer si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et/ou si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.